Temas de Mecánica Cuántica

Primer Cuatrimestre 2025

Guía 2: Sistemas Abiertos y Medición Cuántica

I. Representación de Kraus

P1 **Canal unital** Un ejemplo de canal unital para una partícula de spin $\frac{1}{2}$ en la que los operadores de Kraus $\sqrt{p_\mu}U_\mu(\hat{n}_\mu, \phi)$ son rotaciones en ángulo ϕ alrededor de un eje $\hat{n}_\mu$ con probabilidad p_μ. La polarización inicial es $\vec{p}_0$.

(a) Probar que $\sqrt{p_\mu}\, U_\mu(\hat{n}_\mu, \phi)$ cumplen la condición de normalización.

(b) Evalúe $\rho(t) = \sum_\mu p_\mu \mathcal{D}_\mu(R(\hat{n}_\mu, \phi))\rho(0)\mathcal{D}^\dagger(R(\hat{n}_\mu, \phi))$ para una matriz densidad general $\rho(0) = \frac{1}{2}(I + \vec{p}_0 \cdot \vec{\sigma}))$.

(c) Calcule la fidelidad F.

P2 **Decaimiento para un sistema de spin $\frac{1}{2}$ hacia el estado $|1\rangle$** Considera el canal no unital definido por tres operadores de Kraus: $L_1 = \sqrt{p}I$, $L_2 = \sqrt{1-p}\sigma_-$ y $L_3 = \sqrt{1-p}P_1$, por lo que la evolución está dada por $\rho(t) = pI\rho(0)I + (1-p)(\sigma_-\rho(0)\sigma_+ + P_1\rho(0)P_1)$, siendo $P_1 = |1\rangle\langle 1|\, 1$ y $\sigma_- = |1\rangle\langle 0|$

(a) Probar que $\{L_1, L_2, L_3\}$ cumplen la condición de normalización.

(b) Evalúe el valor medio del vector polarización $\langle p_i(t)\rangle = \mathrm{Tr}(\sigma_i\rho(t))$

(c) Calcule la fidelidad F.

P3 **Canal de amortiguación de amplitud.** El canal de amortiguación de amplitud está dado por los operadores de Kraus $K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix}$ y $K_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde γ es la tasa de decaimiento de $|1\rangle$ a $|0\rangle$.

(a) Pruebe que los operadore de Kraus cumplen la condición de normalización.

(b) Considere un operador de densidad de un solo qubit con la siguiente representación matricial en la base computacional $\rho(0) = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$. Encuentre la representación matricial de este operador de densidad después de la acción del canal de amortiguación de amplitud.

(c) Demuestre que el canal de amortiguación de amplitud obedece una regla de composición. Considere un canal de amortiguación de amplitud $\mathcal{K}_1$ con parámetro γ_1 y considere otro canal de amortiguación de amplitud $\mathcal{K}_2$ con parámetro γ_2. Demuestre que la composición de los canales, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \circ \mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}(\rho) = \mathcal{K}_1(\mathcal{K}_2(\rho))$, es un canal de amortiguación de amplitud con parámetro $\gamma = \gamma_1 + (1-\gamma_1)\gamma_2$. Interprete este resultado a la luz de la interpretación de los γ como una tasa de decaimiento.

II. Corrección cuántica de errores

P4 **Corrección de error de fase con código de tres qubits.** Consideremos un error de fase que transforma los estados base como (sólo interesa la fase relativa)

$$U|0\rangle \to e^{i\phi}|0\rangle\,, \quad U|1\rangle \to e^{-i\phi}|1\rangle$$

Veamos cómo podemos proteger un qubit en el estado genérico $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ de este tipo de errores. Vamos a asumir nuevamente que el error de fase ocurre independientemente en cada qubit y que solo puede ocurrir un único error de fase. Codificaremos en un estado entrelazado.

(a) *Codificación* Para codificarlo utilizamos dos ancillas en el estado $|0\rangle$ y aplicamos las compuertas $CX_{12}CX_{13}$ al estado $|\psi\rangle|0\rangle|0\rangle$ y luego un Hadamard en cada uno de los tres qubits. Dibuje el circuito que realiza esta parte y encuentre el estado codificado $|\psi_1\rangle$.

(b) *Propagación en canal ruidoso* Los tres qubits se envían a través del canal de comunicación ruidoso y se recuperan en el lado del receptor. Durante la comunicación, podría haber ocurrido un error de fase en cualquiera de los tres qubits. Verifique que según el qubit afectado se obtienen los siguientes estados:

$$1.\, |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\{\alpha[(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)] + \beta[(|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)]\}$$
$$2.\, |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\{\alpha[(e^{i\phi}|0\rangle + e^{-i\phi}|1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)] + \beta[(e^{i\phi}|0\rangle - e^{-i\phi}|1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)]\}$$
$$3.\, |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\{\alpha[(|0\rangle + |1\rangle)(e^{i\phi}|0\rangle + e^{-i\phi}|1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)] + \beta[(|0\rangle - |1\rangle)(e^{i\phi}|0\rangle - e^{-i\phi}|1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)]\}$$
$$4.\, |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\{\alpha[(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)(e^{i\phi}|0\rangle - e^{-i\phi}|1\rangle)] + \beta[(|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)(e^{i\phi}|0\rangle - e^{-i\phi}|1\rangle)]\}$$

(c) *Corrección de errores* Para corregir el estado recibido en el otro extremo del canal de comunicación cuántica de posibles errores, aplicamos la puerta de Hadamard en cada uno de los los tres qubits. Obtenga el estado $|\psi_3\rangle$ para cada caso, sin errores o con errores en qubit 1, 2 o 3. Pruebe que expandiendo la fase como $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ y simplificando términos se obtiene

$$\begin{aligned}
&1.|\psi_3\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle\\
&2.|\psi_3\rangle = \alpha(\cos\phi|000\rangle + i\sin\phi|100\rangle) + \beta(\cos\phi|111\rangle + i\sin\phi|011\rangle)\\
&3.|\psi_3\rangle = \alpha(\cos\phi|000\rangle + i\sin\phi|010\rangle) + \beta(\cos\phi|111\rangle + i\sin\phi|101\rangle)\\
&4.|\psi_3\rangle = \alpha(\cos\phi|000\rangle + i\sin\phi|001\rangle) + \beta(\cos\phi|111\rangle + i\sin\phi|110\rangle)
\end{aligned}$$

(d) Se añaden al sistema dos qubits ancilla más en el estado $|0\rangle$. Además, se entrelazan con los tres qubits recibidos utilizando las siguiente secuencia de compuertas: $CX_{14}CX_{24}CX_{15}CX_{35}$. Dibuje el circuito para esta parte y verifique que el estado del sistema ahora es

$$\begin{aligned}
&1. \quad |\psi_4\rangle = \alpha|000\rangle|00\rangle + \beta|111\rangle|00\rangle\\
&2. \quad |\psi_4\rangle = \alpha(\cos\phi|000\rangle|00\rangle + i\sin\phi|100\rangle|11\rangle) + \beta(\cos\phi|111\rangle|00\rangle + i\sin\phi|011\rangle|11\rangle)\\
&3. \quad |\psi_4\rangle = \alpha(\cos\phi|000\rangle|00\rangle + i\sin\phi|010\rangle|10\rangle) + \beta(\cos\phi|111\rangle|00\rangle + i\sin\phi|101\rangle|10\rangle)\\
&4. \quad |\psi_4\rangle = \alpha(\cos\phi|000\rangle|00\rangle + i\sin\phi|001\rangle|01\rangle) + \beta(\cos\phi|111\rangle|00\rangle + i\sin\phi|110\rangle|01\rangle)
\end{aligned}$$

(e) Los dos qubits ancilla recién añadidos se miden y dan el ”síndrome de error”, que puede usarse para diagnosticar y luego corregir cualquier error ocurrido en los tres qubits. Hay cuatro posibles resultados para el síndrome de error. Escriba el estado de los tres primeros qubits $|\psi_5\rangle$ para cada posible error y deduzca la forma de corregir el mismo usando compuerta X_i. Verifique que luego de corregir los errores el estado del sistema será en cualquier caso como se envió originalmene.

$$|\psi_6\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$$

(f) Ahora, para encontrar el estado del qubit que se pretendía transferir, lo decodificamos del estado de tres qubits desentrelazando el qubit con las dos ancillas. Así aplicando $CX_{12}CX_{13}$, verifique que se obtiene para el primer qubit:

$$|\psi_7\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = |\psi\rangle$$

Hemos comunicado exitosamente el estado del qubit $|\psi\rangle$ a través de un canal ruidoso, protegiéndolo de cualquier error de fase único.

P5 **Variante del código perfecto.** Para simular un canal cuántico ruidoso, donde los errores pueden ser de tipo X, Y y Z, utilizamos una variante del código de estabilizador de cinco qubits dado en clase. Este código puede corregir cualquier error en un qubit utilizando un qubit lógico codificado en cinco qubits físicos. El conjunto de generadores es:

$$\begin{aligned} S_1 &= X \otimes Z \otimes Z \otimes X \otimes I \\ S_2 &= I \otimes X \otimes Z \otimes Z \otimes X \\ S_3 &= X \otimes I \otimes X \otimes Z \otimes Z \\ S_4 &= Z \otimes X \otimes I \otimes X \otimes Z. \end{aligned}$$

(a) Pruebe que $S_i^2 = I$, y que por lo tanto sus autovalores son ± 1. Pruebe que los S_i conmutan entre sí (son compatibles).

(b) Los qubits lógicos se expresan más simplemente en términos de los estabilizadores:

$$|0_L\rangle = \frac{1}{4}\prod_i (I + S_i)|0\rangle^{\otimes 5}, \quad |1_L\rangle = \bar{X}|0_L\rangle$$

donde

$$\bar{X} = XXXXX, \quad \bar{Z} = ZZZZZ, \quad \bar{Y} = i\bar{X}\bar{Z}$$

son los operadores de Pauli de un qubit lógico. Pruebe que son autoestados de los S_i con autovalor $+1$. Vea que los qubit lógicos son autoestados con autovalor $+1$ de los S_i (forman un subespacio de dimensión 2). Finalmente halle en forma explícita los qubits lógicos, observe lo extensa de las expresiones.

(c) Mostrar que el operador:

$$S = \frac{1}{4}\prod_i (I + S_i) Z1111$$

codifica un estado $|\Psi\rangle = |\psi\rangle\, |0\rangle^{\otimes 4} = (a|0\rangle + b|1\rangle)\, |0\rangle^{\otimes 4}$ en el estado del espacio lógico $|\Psi_L\rangle = a\,|0_L\rangle + b\,|1_L\rangle$.

(d) Los errores están asociados con los valores propios -1 de los operadores estabilizadores; surgen cuando uno de los cinco qubits físicos es modificado por una de las tres matrices de Pauli: se deben considerar $16 = 3 \times 5 + 1$ casos diferentes, incluyendo el caso sin error. Complete la tabla de síndrome:

Error	S_1	S_2	S_3	S_4	Resultado Medición
I	$+$	$+$	$+$	$+$	0000
X_0	$+$	$+$	$+$	$-$	0001
X_1					
X_2					
X_3					
X_4					
Y_0					
Y_1					
Y_2					
Y_3					
Y_4					
Z_0					
Z_1					
Z_2					
Z_3					
Z_4					

La primera columna contiene la lista de posibles errores; aparte de la identidad, las cuatro columnas de estabilizadores dan la firma de cada error, un símbolo $-$ representa un valor propio -1. La última columna representa los resultados de las mediciones de S_i con cero para 1 y uno para valores propios -1, respectivamente. Una vez identificado el error por medición de los S_i se procede a corregir aplicando el operador de error. Proporcione algunos ejemplos.

(e) **Opcional.** Dibuje un circuito que exprese las partes de este algoritmo, en lo posible indicando las compuertas usadas. Implementar en qiskit este algoritmo usando Quantum Composer o eventualmente algún programa python de gitHub (ya desarrollado).

III. Ecuación de Lindblad

$\boxed{\textbf{P6}}$ **Amortiguación de amplitud a temperatura finita** Considere un átomo de dos niveles con Hamiltoniano $H = \hbar\omega\sigma_z/2$. El estado fundamental es entonces el polo sur $|1\rangle$ en la esfera de Bloch. El contacto de este átomo con el campo electromagnético circundante producirá una evolución descrita por la ecuación maestra

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[H,\rho] + \gamma(n+1)D[\sigma_-] + \gamma n D[\sigma_+]$$

donde γ es una constante y $n = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$ es la distribución de Bose-Einstein con temperatura inversa $\beta = \frac{1}{k_B T}$ y frecuencia ω. Se usa la notación

$$D[L] = L\rho L^\dagger - \frac{1}{2}(L^\dagger L\rho + \rho L^\dagger L) \qquad \sigma_- = |1\rangle\langle 0| \qquad \sigma_+ = |0\rangle\langle 1|$$

(a) Resuelva la evolución del vector de polarización $\vec{p}(t) = Tr(\vec{\sigma}\rho(t))$. Interprete.

(b) Después de que haya transcurrido mucho tiempo, el sistema tenderá a un estado estacionario, que es la solución de

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Verifique que el estado estacionario en este caso es diagonal, con $\rho_x^{ss} = \rho_y^{ss} = 0$ y $\rho_z^{ss} = \frac{1}{2n+1}$, lo que corresponde a una matriz de densidad de equilibrio térmico

$$\rho^{ss} = \begin{pmatrix} \frac{n}{2n+1} & 0 \\ 0 & \frac{n+1}{2n+1} \end{pmatrix}$$

(c) La dinámica disipativa de la ecuación de Lindblad está descrita por los operadores de salto σ_- y σ_+. También podríamos haber introducido operadores de salto directamente en el Hamiltoniano. Por ejemplo, consideremos la dinámica puramente unitaria bajo

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z + \frac{\Omega}{2}(\sigma_+ + \sigma_-).$$

Compare la evolución unitaria con la obtenida con la ecuación de Lindblad. Interprete.

$\boxed{\textbf{P7}}$ **Ecuación maestra para el canal despolarizante** Considere un qubit despolarizante que está sujeto a "errores de Pauli" a una tasa Γ, donde los errores σ_1, σ_2 y σ_3 son igualmente probables. La despolarización puede describirse mediante una ecuación maestra con operadores de Lindblad $\sqrt{\tilde{\Gamma}/3}\sigma_1$, $\sqrt{\tilde{\Gamma}/3}\sigma_2$ y $\sqrt{\tilde{\Gamma}/3}\sigma_3$.

(a) Muestre que esta ecuación maestra tiene la forma:

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H,\rho] - \Gamma\left(\rho - \frac{1}{2}I\right).$$

¿Cómo se relaciona Γ con $\tilde{\Gamma}$?

(b) Hasta un término irrelevante proporcional a la identidad, la matriz hermitiana más general de 2×2 es:

$$H = \frac{\omega}{2}\mathbf{n} \cdot \sigma,$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario. Use esta forma de H y la parametrización de Bloch:

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{P} \cdot \sigma),$$

para mostrar que la ecuación maestra puede reescribirse como:

$$\dot{\mathbf{P}} = \omega(\mathbf{n} \times \mathbf{P}) - \Gamma\mathbf{P}.$$

Así, la polarización precesa uniformemente con frecuencia circular ω alrededor del eje $\mathbf{n}$ mientras se contrae con una vida media de Γ^{-1}.

(c) para el caso $\hat{n} = \hat{z}$ encuentre explícitamente la evolución $\rho(t)$.

IV. Oscilador amortiguado

P8 **Oscilador amortiguado a temperatura cero cuando el estado inicial es un estado estado coherente** Veremos que si el estado inicial es coherente, $\rho(0) = |\alpha(0)\rangle\langle\alpha(0)|$ donde $a\,|\alpha(0)\rangle = \alpha(0)\,|\alpha(0)\rangle$, entonces $\rho(t) = |\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|$, es decir sigue siendo un estado coherente.

(a) Encuentre la ecuación diferencial para $\alpha(t)$ proponiendo $\rho(t) = |\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|$ como solución de la ecuación de Lindblad del osciladore armónico a temperatura cero (solo tiene un operador de Lindblad: $L = \sqrt{\gamma}a$) .

(b) Resuelva la ecuación y encuentre $\alpha(t)$ con valor inicial $\alpha(0)$.

(c) Concluya que la solución es siempre de mínima incerteza.

(d) Verifique que los valores medios en función del tiempo de la posición, momento y energía son los obtenidos en clase.

P9 **Oscilador forzado amortiguado a temperatura no nula cuando el estado inicial es un estado estado coherente** Veremos que si el estado inicial es coherente, $\rho(0) = |\alpha(0)\rangle\langle\alpha(0)|$ donde $a\,|\alpha(0)\rangle = \alpha(0)\,|\alpha(0)\rangle$, entonces $\rho(t) = |\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|$, es decir sigue siendo un estado coherente. El Hamiltoniano se puede expresar como: $H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2) + f(t)(a + a^\dagger)$

(a) Encuentre las ecuaciones diferenciales para la evolución de los valores medios de posición, momento y energía en función del tiempo. ¿se cumple el teorema Ehrenfest para los valores medios de posición y momento?.

(b) Para $f = f_0$ (forzante constante), resuelva las ecuaciones de los valores medios de posición momento y energía en función del tiempo (puede tomar condiciones iniciales generales).

(c) Para $f(t) = f_0 \cos(\omega_0 t)$ (forzante armónico), resuelva las ecuaciones para los valores medios de posición momento y energía en función del tiempo (puede tomar condiciones iniciales generales).

(d) Analice si con un forzante puede haber una solución estacionaria (de equilibrio térmico).

V. Función de Wigner

P10 Considere el estado definido por la siguiente matriz densidad. (La notación $|\beta_t\rangle$ representa el estado coherente correspondiente al número complejo $\beta_t = \beta_0 e^{-i\omega t} e^{-\gamma t/2}$):

$$\rho_t = \mathcal{N}\left(|\beta_t\rangle\langle\beta_t| + |-\beta_t\rangle\langle-\beta_t| + e^{-2|\beta_0|^2(1-e^{-\gamma t})}\left(|\beta_t\rangle\langle-\beta_t| + |-\beta_t\rangle\langle\beta_t|\right)\right) \tag{1}$$

donde la constante de normalización es:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2 + 2e^{-2|\beta_0|^2}} \tag{2}$$

Nota: recuerde que $\langle\beta|-\beta\rangle = e^{-2|\beta|^2}$.

(a) Verifique que $\mathrm{Tr}(\rho_t) = 1$ para todo tiempo t.

(b) Diga cuál es el estado inicial (a $t = 0$). ¿Es puro?

(c) Calcule la pureza $\xi = \mathrm{Tr}(\rho_t^2)$. Haga un gráfico de la pureza como función del tiempo para valores tales que $\gamma \ll \omega$. Por ejemplo, tome valores tales como: $|\beta| = 5$, $\gamma = 0.1$, $\omega = 1$, $m = 1$ y $\hbar = 1$ en las unidades apropiadas. Interprete el resultado.

(d) Calcule la función de Wigner del estado ρ_t e interprete el resultado. Debe obtener una expresión analítica para $W(x, p, t)$ para todo punto en el espacio de fases (x, p) y para todo tiempo t. (Haga el cálculo analítico sin realizar ninguna integral).

(e) Para el caso de $\beta = 5$, grafique la función de Wigner como función del tiempo haciendo una película apelando a algún software para evaluar $W(\alpha, t)$ en distintos tiempos. Interprete el resultado.

Nota: Este estado es solución de la ecuación maestra de la óptica cuántica a temperatura nula (no hace falta que demuestre esto, pero sería interesante que lo intente).

P11 **Cálculo de la función de Wigner de gatos de Schrödinger con phase** Considere aquellos estados del tipo $|\Psi_\phi\rangle = N_\phi(|\beta_1\rangle + \exp(i\phi)\,|\beta_2\rangle)$, donde ϕ es una fase arbitraria.

(a) Pruebe la relación de composición de los operadores de desplazamiento:

$$D(\gamma_1)D(\gamma_2) = D(\gamma_1 + \gamma_2))\exp(\gamma_1 \wedge \gamma_2/2)$$

donde $\gamma_1 \wedge \gamma_2 = \gamma_1\gamma_2^* - \gamma_2\gamma_1^* = \frac{2i(x_1p_2 - x_2p_1)}{\hbar}$.

(b) Usando estos resultados obtenga la siguiente expresión simple para $W_{ij}(\alpha) = \langle\beta_i|\,A(\alpha)\,|\beta_j\rangle$ siendo $A(\alpha) = \frac{D(\alpha)RD^\dagger(\alpha)}{\pi}$ el operador de punto:

$$W_{ij}(\alpha) = \exp(-2|\alpha - (\beta_i + \beta_j)/2|)\exp(\alpha \wedge (\beta_i - \beta_j))\exp(\beta_i \wedge \beta_j/2).$$

(c) Calcule la función de Wigner para el caso general.

(d) Especialize para el caso $\beta_1 = -\beta_2 = \beta$ con $\phi = 0$ y $\phi = \pi$. Analice.

P12 **Ecuación de evolución de la función de Wigner para el oscilador armónico a temperatura no nula.** Considere la ecuación maestra del oscilador armónico con dos operadores de Lindblad:

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] + \frac{\gamma}{i\hbar}\left([x, \{p, \rho\}] - [p, \{x, \rho\}]\right) + \gamma(1 + 2n)\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)\left([x, [x, \rho]] + \frac{[p, [p, \rho]]}{m^2\omega^2}\right).$$

(a) Obtenga para este caso la ecuación de evolución de la función de Wigner:

$$\dot{W}(\alpha) = \{H, W(\alpha)\}_{PB} + \gamma\left(\partial_x(xW(\alpha)) + \partial_p(pW(\alpha))\right) + \gamma(1 + 2n)\hbar m\omega\left(\partial_p^2 W(\alpha) + \frac{\partial_x^2 W(\alpha)}{m^2\omega^2}\right).$$

Ayuda: Puede usar la parte unitaria de la evolución obtenida en clase teórica. Lo que se pide aquí es encontrar las contribuciones no unitarias.

(b) En el límite de alta temperatura $(1 + 2n \sim 2K_BT/(\hbar\omega))$ obtenga la ecuación de Fokker-Plank:

$$\dot{W} = \{H, W\}_{PB} + 2\gamma\left(\partial_x(xW) + \partial_p(pW)\right) + \gamma m k_B T\left(\partial_p^2 W + \frac{\partial_x^2 W}{m^2\omega^2}\right)$$

VI. Teoría de medición de von Neumann

P13 **Modelo de medición de von Neumann de primer tipo (versión simplificada).** En el siguiente problema estudiaremos una versión simplificada del modelo de proceso de medición propuesto por von Neumann, en el que no sólo tendremos en cuenta el sistema a medir sino que también al aparato de medición, que se trata como un sistema cuántico adicional. La idea consiste en tratar de codificar los distintos valores y probabilidades del observable A que se quiere medir en una base de estados del aparato de medición que sean fácilmente distinguibles. En el ejemplo a estudiar, consideraremos el aparato de medición como un sistema de variable continua y utilizaremos su grado de libertad de posición para codificar la información deseada. Por simplicidad supondremos además que el observable A a medir es no degenerado, de forma tal que

$$A = \sum_i a_i \,|a_i\rangle\!\langle a_i| \,, \quad a_i \neq a_j, \text{ si } i \neq j.$$

Denotaremos al sistema cuyo observable queremos medir como $\mathcal{S}$, mientras que el sistema del aparato de medición será $\mathcal{M}$, de forma tal que el sistema total estará representado por el espacio de Hilbert $\mathscr{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathscr{H}_{\mathcal{M}}$. Para realizar la medición se evoluciona al sistema compuesto según una transformación unitaria

$$U = e^{-i\lambda A \otimes p/\hbar}.$$

donde p es el operador momento en $\mathcal{M}$ y λ es una constante conocida.

(a) Proponga un Hamiltoniano H del sistema total $\mathscr{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathscr{H}_{\mathcal{M}}$ tal que esta evolución unitaria corresponde a la evolución temporal por un cierto tiempo T.

(b) Calcule la acción de la transformación U sobre el estado $|a_i\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |x = x_0\rangle_{\mathcal{M}}$, donde $|x = x_0\rangle_{\mathcal{M}}$ es un autoestado de la posición de $\mathcal{M}$ (estado no físico). ¿Cómo puede interpretar la acción de U? ¿Puede inferir el valor del autovalor a_i a partir de la posición de $\mathcal{M}$?

(c) Supongamos que el sistema auxiliar se encuentra inicialmente en un estado Gaussiano, $|0, \sigma\rangle_{\mathcal{M}}$, centrado en el origen y con varianza σ, es decir tal que

$$\langle x|0, \sigma\rangle_{\mathcal{M}} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-x^2/4\sigma^2}.$$

Calcule en tal caso $U\,|a_i\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |0, \sigma\rangle_{\mathcal{M}}$. ¿Cómo puede interpretar la acción de U? ¿Cuál es la densidad de probabilidad en posición del sistema $\mathcal{M}$ luego de haber aplicado U? ¿Puede inferir el valor de a_i a partir de esta densidad de probabilidad?

(d) Suponga ahora que el estado inicial de $\mathcal{S}$ es un estado general $|\psi\rangle_{\mathcal{S}} = \sum_i c_i \,|a_i\rangle$. ¿Cuál es la probabilidad de obtener a_i si se mide A sobre $|\psi\rangle_{\mathcal{S}}$? Nuevamente el sistema auxiliar comienza en el mismo estado Gaussiano del ítem anterior, $|0, \sigma\rangle_{\mathcal{M}}$. Calcule el estado del sistema luego de la aplicación de U. ¿Cuál es la densidad de probabilidad de la posición de $\mathcal{M}$ luego de la acción de U? ¿Puede inferir los posibles valores de a_i y las probabilidades correspondientes? ¿Qué pasa en particular si se elige λ tal que $\lambda(a_{i+1} - a_i) \gg \sigma \;\forall i$?

P14 **El experimento de Stern–Gerlach.** Vamos a reconsiderar el experimento de Stern-Gerlach, agregando el grado de libertad de posición de los átomos (que hasta ahora solo consideramos cualitativamente). En presencia de un campo magnético $\boldsymbol{B}$, un momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ tiene una energía de interacción $H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$. Para un spin tenemos que $\boldsymbol{\mu} = -|\mu|\,\boldsymbol{S}$ (con $\boldsymbol{S}$ el operador de spin y $|\mu|$ una constante que depende de las propiedades de la partícula, como su masa, carga y el factor-g). Si estamos en una región del espacio donde $\boldsymbol{B} = B(z)\hat{\boldsymbol{z}}$ y además el gradiente del campo es aproximadamente constante, es decir $\frac{\partial B}{\partial z} \approx$ cte, entonces el Hamiltoniano de interacción está dado por

$$H_{\text{int}} = -\mu B_0' z \otimes \sigma_z, \qquad B_0' := \frac{\partial B}{\partial z} \approx \text{cte}.$$

En vista del problema anterior, ¿cómo puede interpretar el efecto de la evolución temporal generada por H_{int}? ¿Cómo puede interpretar esto en términos del experimento de Stern-Gerlach?