# Temas de Mecánica Cuántica

Primer Cuatrimestre 2025

## **Guía 2d**: Guia Sistemas Cuánticos Abiertos

**P1** **Oscilador amortiguado a temperatura cero cuando el estado inicial es un estado estado coherente** Veremos que si el estado inicial es coherente, $\rho(0) = |\alpha(0)\rangle\langle\alpha(0)|$ donde $a\,|\alpha(0)\rangle = \alpha(0)\,|\alpha(0)\rangle$, entonces $\rho(t) = |\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|$, es decir sigue siendo un estado coherente.

(a) Encuentre la ecuación diferencial para $\alpha(t)$ proponiendo $\rho(t) = |\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|$ como solución de la ecuación de Lindblad del osciladore armónico a temperatura cero (solo tiene un operador de Lindblad: $L = \sqrt{\gamma}a)$ .

(b) Resuelva la ecuación y encuentre $\alpha(t)$ con valor inicial $\alpha(0)$.

(c) Concluya que la solución es siempre de mínima incerteza.

(d) Verifique que los valores medios en función del tiempo de la posición, momento y energía son los obtenidos en clase.

**P2** **Oscilador forzado amortiguado a temperatura no nula cuando el estado inicial es un estado estado coherente** Veremos que si el estado inicial es coherente, $\rho(0) = |\alpha(0)\rangle\langle\alpha(0)|$ donde $a\,|\alpha(0)\rangle = \alpha(0)\,|\alpha(0)\rangle$, entonces $\rho(t) = |\alpha(t)\rangle\langle\alpha(t)|$, es decir sigue siendo un estado coherente. El Hamiltoniano se puede expresar como: $H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2) + f(t)(a + a^\dagger)$

(a) Encuentre las ecuaciones diferenciales para la evolución de los valores medios de posición, momento y energía en función del tiempo. ¿se cumple el teorema Ehrenfest para los valores medios de posición y momento?.

(b) Para $f = f_0$ (forzante constante), resuelva las ecuaciones de los valores medios de posición momento y energía en función del tiempo (puede tomar condiciones iniciales generales).

(c) Para $f(t) = f_0\cos(\omega_0 t)$ (forzante armónico), resuelva las ecuaciones para los valores medios de posición momento y energía en función del tiempo (puede tomar condiciones iniciales generales).

(d) Analice si con un forzante puede haber una solución estacionaria (de equilibrio térmico).

**P3** Considere el estado definido por la siguiente matriz densidad. (La notación $|\beta_t\rangle$ representa el estado coherente correspondiente al número complejo $\beta_t = \beta_0 e^{-i\omega t}e^{-\gamma t/2}$):

$$\rho_t = \mathcal{N}\left(|\beta_t\rangle\langle\beta_t| + |-\beta_t\rangle\langle-\beta_t| + e^{-2|\beta_t|^2(1-e^{-\gamma t})}\left(|\beta_t\rangle\langle-\beta_t| + |-\beta_t\rangle\langle\beta_t|\right)\right) \tag{1}$$

donde la constante de normalización es:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2 + 2e^{-2|\beta|^2}} \tag{2}$$

Nota: recuerde que $\langle\beta|-\beta\rangle = e^{-2|\beta|^2}$.

(a) Verifique que $\mathrm{Tr}(\rho_t) = 1$ para todo tiempo $t$.

(b) Diga cuál es el estado inicial (a $t = 0$). ¿Es puro?

(c) Calcule la pureza $\xi = \mathrm{Tr}(\rho_t^2)$. Haga un gráfico de la pureza como función del tiempo para valores tales que $\gamma \ll \omega$. Por ejemplo, tome valores tales como: $|\beta| = 5$, $\gamma = 0.1$, $\omega = 1$, $m = 1$ y $\hbar = 1$ en las unidades apropiadas. Interprete el resultado.

(d) Calcule la función de Wigner del estado $\rho_t$ e interprete el resultado. Debe obtener una expresión analítica para $W(x, p, t)$ para todo punto en el espacio de fases $(x, p)$ y para todo tiempo $t$. (Haga el cálculo analítico sin realizar ninguna integral).

(e) Para el caso de $\beta = 5$, grafique la función de Wigner como función del tiempo haciendo una película apelando a algún software para evaluar $W(\alpha, t)$ en distintos tiempos. Interprete el resultado.

**Nota:** Este estado es solución de la ecuación maestra de la óptica cuántica a temperatura nula (no hace falta que demuestre esto, pero sería interesante que lo intente).