1. Considere un sistema cuántico de dos niveles descrito por la siguiente Hamiltoniana dependiente del tiempo:

$$\hat{H}(t) = \begin{pmatrix} vt & \Delta \\ \Delta & -vt \end{pmatrix},$$

donde los parámetros del sistema son: $v = 1.0$ meV/ps (velocidad de barrido), $\Delta = 0.1$ meV (acoplamiento entre niveles), $\hbar = 6.582 \times 10^{-4}$ meV·ps (constante de Planck reducida), $t \in [-T, T]$ con $T = 10$ ps.

Suponga que el sistema se encuentra inicialmente ($t = -T$) en el **estado adiabático inferior**, es decir, el autovector correspondiente al autovalor más bajo de $\hat{H}(-T)$.

Objetivo: Verificar numéricamente la fórmula de transición de Landau-Zener comparando la evolución cuántica exacta con la solución analítica.

(a) Resuelva numéricamente la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle,$$

con la condición inicial dada, integrando desde $t = -T$ hasta $t = +T$.

(b) Calcule la probabilidad de que el sistema haya hecho una transición al estado adiabático superior en $t = +T$:

$$P_{\text{num}} = |\langle \psi_+(T) | \psi(T) \rangle|^2,$$

donde $|\psi_+(T)\rangle$ es el autovector correspondiente al autovalor positivo de $\hat{H}(T)$.

(c) Compare el resultado con la fórmula analítica de Landau-Zener:

$$P_{\text{LZ}} = \exp\left(-\frac{\pi \Delta^2}{\hbar v}\right).$$

(d) Discuta la concordancia entre los resultados. ¿Qué ocurre si se aumenta el tiempo total T? ¿Y si se modifica el valor de Δ o v?

2. El **Eco de Loschmidt** es una herramienta fundamental en la física cuántica para estudiar la sensibilidad de un sistema a perturbaciones y la reversión temporal. Se define como:

$$L(t) = |\langle \psi_0 | e^{iHt} e^{-i(H+V)t} | \psi_0 \rangle|^2, \tag{1}$$

donde $|\psi_0\rangle$ es el estado inicial, H es el Hamiltoniano no perturbado y V representa una perturbación.

Se considera un sistema de una sola partícula en una cadena unidimensional con N sitios descrito por el Hamiltoniano de tipo tight-binding:

$$H = -J \sum_{n=1}^{N-1} (|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|), \tag{2}$$

donde J es la amplitud de salto entre sitios adyacentes. Se introduce una perturbación local en el primer sitio:

$$V = \lambda |1\rangle\langle 1|, \tag{3}$$

donde λ es la fuerza de la perturbación.

Se pide:

(a) Determinar la expresión analítica para $L(t)$ en el caso de una cadena de solo dos sitios ($N = 2$).

(b) Discutir el comportamiento de $L(t)$ en el límite de tiempos largos.

(c) Considerar el caso en que la perturbación es global, es decir, afecta a todos los sitios con una magnitud uniforme ($V = \lambda \sum_n |n\rangle\langle n|$). ¿Cómo cambia el comportamiento del eco de Loschmidt?

3. Considere un sistema cuántico de dos niveles (qubit) con la siguiente Hamiltoniana:

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2} \hat{\sigma}_z,$$

donde $\omega > 0$ y $\hat{\sigma}_z$ es la matriz de Pauli correspondiente al eje z.

Sean los operadores:

$$\hat{W} = \hat{\sigma}_x, \quad \hat{V} = \hat{\sigma}_x.$$

Ambos operadores no conmutan con la Hamiltoniana, por lo que su evolución en el tiempo no es trivial.

El correlador fuera de orden temporal (OTOC, por sus siglas en inglés) está definido como:

$$F(t) = \left\langle \hat{W}^\dagger(t) \hat{V}^\dagger(0) \hat{W}(t) \hat{V}(0) \right\rangle,$$

donde los operadores evolucionan en la representación de Heisenberg:

$$\hat{W}(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{W} e^{-i\hat{H}t}.$$

Se pide:

(a) Calcular analíticamente la evolución temporal del operador $\hat{W}(t)$.

(b) Evaluar el OTOC $F(t)$ para el estado base $|0\rangle$, definido por:

$$\hat{\sigma}_z |0\rangle = |0\rangle .$$

(c) Interpretar el comportamiento de $F(t)$ en el tiempo. ¿El sistema muestra indicios de caos cuántico?

4. Considera un sistema de dos espines $\frac{1}{2}$ interactuando a través de un Hamiltoniano de Heisenberg con un campo magnético externo en la dirección z. El Hamiltoniano del sistema es:

$$H = J\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + B(S_1^z + S_2^z),$$

donde:

- J es la constante de intercambio que describe la interacción entre los espines,
- $\vec{S}_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$ son los operadores de spin para el i-ésimo espín,
- B es la intensidad del campo magnético externo.

El estado inicial del sistema es $|\psi_0\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle$, donde $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ son los autoestados de S^z con valores propios $+\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$, respectivamente.

(a) **Construcción del subespacio de Krylov:**
   - Escribe el Hamiltoniano H en la base computacional $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$.
   - Calcula los vectores $H|\psi_0\rangle$, $H^2|\psi_0\rangle$, y $H^3|\psi_0\rangle$.
   - Construye el subespacio de Krylov de orden 3, $\mathcal{K}_3(H, |\psi_0\rangle)$.

(b) **Ortogonalización de Gram-Schmidt:**
   - Aplica el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a los vectores generadores de $\mathcal{K}_3(H, |\psi_0\rangle)$ para obtener una base ortonormal del subespacio.

(c) **Evolución temporal en el subespacio de Krylov:**
   - Proyecta el Hamiltoniano H en el subespacio de Krylov utilizando la base ortonormal obtenida.
   - Calcula la evolución temporal del estado inicial $|\psi_0\rangle$ en este subespacio, es decir, encuentra $|\psi(t)\rangle$ tal que:

$$|\psi(t)\rangle \approx e^{-iHt}|\psi_0\rangle.$$

(d) **Comparación con la evolución exacta:**
   - Calcula la evolución exacta del estado inicial bajo el Hamiltoniano H y compara el resultado con la aproximación obtenida en el subespacio de Krylov. Discute la precisión de la aproximación.