

Temas de Mecánica Cuántica

Primer Cuatrimestre 2025

Guía 3: Guía Óptica Cuántica

I. Átomo de dos niveles en campo electromagnético

P1 **Oscilaciones de Rabi en un átomo de dos niveles** Considere un átomo o ion de dos niveles $|g\rangle$ y $|e\rangle$ con energías $E_g < E_e$, donde $\hbar\omega_a = E_e - E_g$ y $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$. El átomo se acopla con un campo eléctrico externo clásico que oscila con frecuencia ω . El Hamiltoniano del sistema es:

$$H = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\Omega}{2}\cos(\omega t + \phi)\sigma_x,$$

donde Ω es una constante que depende del momento dipolar del átomo y de la amplitud del campo.

- (a) Cambie al sistema rotante: $|\Psi(t)\rangle = U_R(t)|\Phi(t)\rangle$, donde $U_R(t) = \exp(-i\frac{\omega t}{2}\sigma_z)$. Muestre que el nuevo Hamiltoniano es:

$$H_R(t) = U_R^\dagger(t)HU_R(t) - i\hbar U_R^\dagger(t)\frac{\partial}{\partial t}U_R(t) = \frac{\hbar\Delta}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\Omega}{2}(\sigma_x \cos(\omega t) - \sigma_y \sin(\omega t)) \cos(\omega t + \phi),$$

donde $\Delta = \omega_a - \omega$ (“detuning”).

- (b) Promediando en un período $H_R(t)$, obtenga la aproximación de onda rotante:

$$H_{\text{RWA}} = \frac{\hbar\Delta}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\Omega}{2}(\cos\phi\sigma_x + \sin\phi\sigma_y) = \frac{\hbar\Omega_R}{2}\hat{n} \cdot \vec{\sigma},$$

donde $\Omega_R = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}$ (frecuencia de Rabi) y \hat{n} es el vector unitario con coordenadas esféricas (θ, ϕ) , $\cos\theta = \frac{\Delta}{\Omega_R}$, $\sin\theta = \frac{\Omega}{\Omega_R}$.

- (c) Calcule el operador evolución $U_{\text{RWA}}(t) = e^{-iH_{\text{RWA}}t/\hbar}$ (recuerde que $e^{-i\gamma\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\gamma I - i\sin\gamma\hat{n}\cdot\vec{\sigma}$). Identifique la evolución como una rotación del estado, y concluya que se puede obtener cualquier estado eligiendo adecuadamente los parámetros.
- (d) Suponga que inicialmente el átomo está en el estado excitado, $|\psi(0)\rangle = |e\rangle$. Calcule el estado a un tiempo t posterior y la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado en función del tiempo. ¿Qué pasa en el caso resonante $\omega_a = \omega$?

P2 **Compuertas para un átomo de dos niveles**

Considere el resultado de oscilaciones de Rabi en un sistema de dos niveles y, en particular, el operador de evolución temporal U que encontraron. A partir de la forma de este operador encuentre cómo tienen que ser el área del pulso o pulsos para:

- (a) Implementar una compuerta Hadamard.
 (b) Invertir la población del sistema.
 (c) Obtener las siguientes trayectoria en la esfera de Bloch

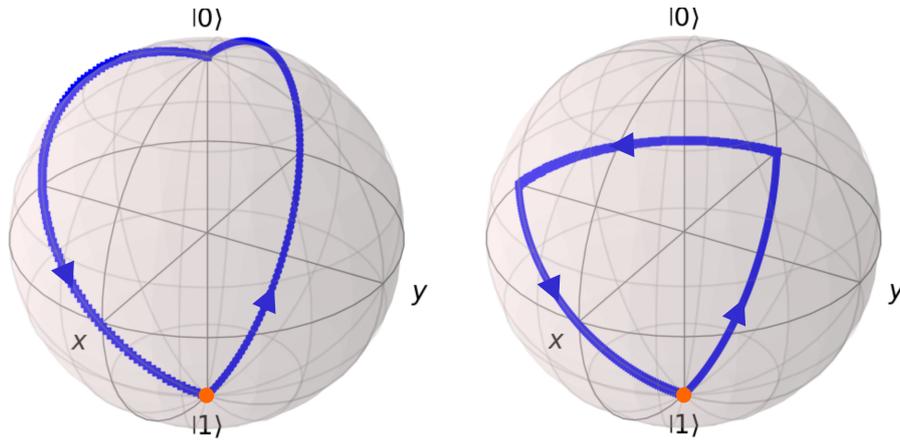


Figura 1:

Para el último caso, comparar la fase geométrica que se obtiene en cada una de las dos evoluciones.

P3 Interferencia de Ramsey

Consideremos nuevamente un átomo de dos niveles con estados $|g\rangle$ y $|e\rangle$, bajo la acción de un láser tal que la desintonía es $\Delta = \omega_L - \omega_0$ y la frecuencia de rabi de la interacción Ω . La técnica propuesta por Ramsey (1949), propone una secuencia de tres pasos para medir de forma muy precisa la frecuencia de transición de un átomo. Primero se aplica un pulso $\pi/2$ seguido por una evolución libre de tiempo T y finalmente otro pulso $\pi/2$. Al finalizar la secuencia, se detecta si el átomo está en el estado excitado $|e\rangle$.

- (a) Demostrar que la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado es

$$P_e = 4 \frac{\Omega^2}{\tilde{\Omega}^2} \sin^2 \left(\frac{\tilde{\Omega}\tau}{2} \right) \left[\cos \left(\frac{\Delta T}{2} \right) \cos \left(\frac{\tilde{\Omega}\tau}{2} \right) - \frac{\Delta}{\tilde{\Omega}} \sin \left(\frac{\Delta T}{2} \right) \sin \left(\frac{\tilde{\Omega}\tau}{2} \right) \right]^2.$$

- (b) Graficar la probabilidad para $\Omega = 1 \times 2\pi$ MHz y $\Delta = 0.1 \times 2\pi$ MHz, para diferentes valores de τ y T (en particular para el valor de τ para el cual efectivamente es un pulso $\pi/2$ si el sistema está perfectamente en resonancia ($\Delta = 0$)).
- (c) ¿Qué esperan que pase si el sistema no está a temperatura 0, como supone esta deducción?

II. Sistemas abiertos

P4 (Numérico) Oscilaciones de Rabi en sistemas abiertos Considere un sistema como el descrito en los ejercicios anteriores, pero donde ahora el átomo no está aislado de su entorno. La evolución podemos describirla con una ecuación de Lindblad, donde la parte unitaria será la misma que antes, y se agregarán términos disipativos en función del tipo de interacción con el entorno. Para cada una de las siguientes situaciones, grafique la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado, si la frecuencia de rabi es $\Omega = 1 \times 2\pi$ MHz y la desintonía $\Delta = 0.1 \times 2\pi$ MHz.

- (a) Si consideramos que el sistema sufre decoherencia por decaimiento espontáneo, con un $\Gamma = \{0.01, 0.1, 1\} \times 2\pi$ MHz. El disipador en este caso es de la forma $L = \Gamma |g\rangle \langle e|$. (T_1)
- (b) Si consideramos que el sistema sufre desfase (*dephasing*) porque el láser tiene un ancho de línea $\gamma_L = \{0.01, 0.1, 1\} \times 2\pi$. El disipador en este caso es de la forma $L = \gamma_L |g\rangle \langle g|$. (T_2)

Discuta si aún con efectos de decoherencia pueden realizarse operaciones coherentes, y en qué régimen de ser así.

P5 Solución estacionaria de las ecuaciones ópticas de Bloch Considere un átomo de dos niveles bajo el efecto de un láser. Las ecuaciones para el operador densidad son las ecuaciones ópticas de Bloch, que bajo la aproximación de onda rotante se escriben como

$$\begin{aligned}\partial_t \rho_{ee} &= i\frac{\Omega}{2}(\tilde{\rho}_{eg} - \tilde{\rho}_{ge}) - \Gamma \rho_{ee}, \\ \partial_t \rho_{gg} &= -i\frac{\Omega}{2}(\tilde{\rho}_{eg} - \tilde{\rho}_{ge}) + \Gamma \rho_{ee}, \\ \partial_t \tilde{\rho}_{ge} &= -(\gamma_{\perp} + i\Delta)\tilde{\rho}_{ge} - i\frac{\Omega}{2}(\rho_{ee} - \rho_{gg}), \\ \partial_t \tilde{\rho}_{eg} &= -(\gamma_{\perp} - i\Delta)\tilde{\rho}_{eg} + i\frac{\Omega}{2}(\rho_{ee} - \rho_{gg}),\end{aligned}$$

donde Γ es la tasa de emisión espontánea, Ω la frecuencia de Rabi, $\Delta = \omega_L - \omega_a$ y $\gamma_{\perp} = \Gamma/2 + \gamma_c$, donde γ_c modela efectos de decoherencia más allá de la emisión espontánea, como colisiones o el ancho de línea del láser.

Usando la condición estacionaria $\dot{\rho} = 0$ y la condición de normalización $\rho_{ee} + \rho_{gg} = 1$, encuentre la expresión analítica de ρ_{ee} y $\tilde{\rho}_{ge}$. Escríbalas además en función del parámetro de saturación

$$s := \frac{\Omega^2/\gamma_{\perp}\Gamma}{1 + \Delta^2/\gamma_{\perp}^2}.$$

P6 Eco de Fotones El *eco de fotones* es una técnica espectroscópica poderosa que permite sortear ciertos procesos de desfase, por ejemplo, el desplazamiento Doppler debido al movimiento atómico en una muestra térmica de átomos. La técnica se asemeja al método de Ramsey, con la diferencia de que entre los dos pulsos de Ramsey $\pi/2$, es decir, durante el tiempo de precesión libre, se aplica un pulso adicional π , que invierte la parte imaginaria de la coherencia. Para ilustrar el principio de eco de fotones, vamos a hacer una simulación numérica de la ecuación de Schrödinger y las ecuaciones de Bloch para un sistema de dos niveles con y sin desfase inhomogéneo:

- Escriba el Hamiltoniano del sistema y realice una simulación numérica de la ecuación de Schrödinger (concatenando los pulsos) para la siguiente secuencia temporal de pulsos (hay cambio de notación: $|1\rangle \rightarrow |g\rangle$, $|2\rangle \rightarrow |e\rangle$):
 - Pulso resonante $\pi/2$ ($\Delta_{12} = 0$) eligiendo $\Omega_{12} = 2$,
 - Evolución durante un tiempo T sin radiación ($\Omega_{12} = 0$, $\Delta_{12} \neq 0$),
 - Pulso resonante π usando los mismos parámetros que en (i),
 - Evolución durante un tiempo T sin radiación.

Prepare un gráfico que ilustre la evolución temporal del valor medio de la población del excitado y de σ_y (si el $H_{\text{int}} \propto \sigma_x$).

- Ahora vamos a considerar muchas instancias de la evolución, en las que Δ sigue una distribución gaussiana $N(\Delta_0, \sigma_{\Delta})$. Repita el cálculo del apartado (a), resolviendo ahora numéricamente para $N = 1000$ instancias de Δ , y promedie sobre los resultados la evolución del estado excitado. Grafique el resultado en función del tiempo. Interprete. (Ayuda: Graficar la evolución en la esfera de Bloch, o pensar cómo sería). A este desfase se lo llama desfase inhomogéneo y el tiempo de coherencia lo notamos como T_2^* .
- Por último, repita el inciso (a) pero incluyendo un término de desfase con $\Gamma_{12} = 0.03\Omega_{12}$. ¿Hay un eco?

P7 Evolución de la pureza en sistemas de dos niveles. Si el operador densidad del átomo de dos niveles evoluciona según

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \Gamma\mathcal{D}[\sigma_-]\rho \quad (1)$$

derive una ecuación de movimiento para la **pureza** en términos de los elementos $\rho_{ee}, \rho_{eg}, \rho_{ge}, \rho_{gg}$ de la matriz densidad (recuerde $\mathcal{D}[\sigma_-]\rho = \sigma_- \rho \sigma_+ - (1/2)\{\sigma_+ \sigma_-, \rho\}$).

III. Estados vestidos. Separación de Autler-Townes

P8 Estados vestidos. Dado

$$H_{\text{RWA}} = \frac{\hbar\Delta}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\Omega}{2}(\cos\phi\sigma_x + \sin\phi\sigma_y) = \frac{\hbar\Omega_R}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma},$$

donde $\Omega_R = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}$ (frecuencia de Rabi) y \hat{n} es el vector unitario con coordenadas esféricas (θ, ϕ) , $\cos\theta = \frac{\Delta}{\Omega_R}$, $\sin\theta = \frac{\Omega}{\Omega_R}$.

- Encontrar las energías E_{\pm} y sus correspondientes los autoestados $|\pm\rangle$ de H_{RWA} (átomo de dos niveles interactuando con campo e.m. clásico en el sistema rotante). ¿Cuáles son los autoestados para el caso resonante ($\Delta = 0$)?
- Dibuje E_{\pm} en función de Δ (detuning), en el caso cuando hay campo e.m. y cuando no lo hay.

P9 Desdoblamiento de Autler Townes.

Haga un esquema de dos niveles con campo resonante y un tercero por arriba con campo de prueba no resonante. A la izquierda sin campo e.m. y a la derecha con campo e.m.

- Dibuje cualitativamente el espectro de fluorescencia, identificando los picos desdoblados.
- Para un campo laser intenso sobre átomo de hidrógeno resonante entre el fundamental y el primer excitado, se pide dibujar cualitativamente un diagrama indicando los picos de ionización multifotónica desdoblados por efecto Autler Townes.

IV. Átomo de dos niveles en campo electromagnético cuantizado. Ion atrapado.

P10 El modelo de Jaynes–Cummings. Considere un átomo de dos niveles $|g\rangle$ y $|e\rangle$ cuyo Hamiltoniano puede tomarse como

$$H_A = \frac{\hbar\omega_a}{2}(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z,$$

donde $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ y $\hbar\omega_a = E_e - E_g$ es el gap entre los niveles del átomo. El átomo interactúa con un único modo del campo electromagnético cuantizado en el interior de una cavidad. El Hamiltoniano del modo de campo electromagnético es

$$H_C = \hbar\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right),$$

donde a^\dagger y a son operadores de creación y destrucción de fotones. En la aproximación dipolar, la interacción entre el átomo y el campo electromagnético se reduce a una interacción entre el dipolo eléctrico del átomo (\mathbf{d}) y el campo eléctrico en la cavidad (\mathbf{E}), dada por $H_{\text{int}} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$. En la aproximación de onda rotante (*rotating wave approximation*) se desprecian los términos que oscilan rápidamente y la interacción puede aproximarse como

$$H_{\text{int}} \approx -i\frac{\hbar\Omega}{2}(\sigma_+ \otimes a - \sigma_- \otimes a^\dagger),$$

donde $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ y $\sigma_- = \sigma_+^\dagger$. De esta forma, el sistema completo está descrito por el Hamiltoniano de Jaynes–Cummings

$$H_{\text{JC}} = H_A + H_C + H_{\text{int}} = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) - i\frac{\hbar\Omega}{2}(\sigma_+ \otimes a - \sigma_- \otimes a^\dagger).$$

- Definimos el operador número de excitaciones como

$$N = a^\dagger a + |e\rangle\langle e|.$$

Escriba los autoestados y autovalores del operador N . ¿Están degenerados los autovalores de N ? Interprete el significado de este operador.

- (b) Muestre que $[N, H_{JC}] = 0$ por lo que se puede elegir una base común de autoestados (se interpreta que el número de excitaciones se conserva).
- (c) Aprovechando lo anterior, muestre que el problema de diagonalizar H_{JC} se reduce al problema de diagonalizar matrices de 2×2 correspondientes a cada número de excitaciones n ($n > 0$), ¿qué se tiene en el caso de cero excitaciones?. Diagonalice el Hamiltoniano de Jaynes–Cummings en cada subespacio invariante. **Ayuda.** Al ser un problema de dos estados podemos usar lo conocido para diagonalizar un sistema general de dos estados, cuyo Hamiltoniano se escribe en la base $\{|e, n-1\rangle = |+\rangle, |g, n\rangle = |-\rangle\}$ como $H_n = \hbar(a_n + \vec{b}_n \cdot \vec{\sigma})$, donde $a_n = \omega_c n$, $\vec{b}_n = \frac{\Delta}{2} \hat{z} + \frac{\Omega}{2} \sqrt{n} \hat{y}$, la desintonía es $\Delta = \omega_a - \omega_c$ y las matrices de Pauli se refieren a la base especificada.
- (d) Especialice la solución exacta de los autoestados y energías para los dos siguientes límites: (i) la frecuencia de Bohr del átomo ω_a coincide con la de la cavidad ω_c (caso resonante). (ii) ambas frecuencias son muy distintas (régimen dispersivo), $|\Delta| \gg \Omega$, considerando independientemente los casos $\Delta > 0$ y $\Delta < 0$.

P11 **Interacción entre grados de libertad internos y de traslación: Modelo de Jaynes–Cummings para iones atrapados.** Se acoplan los grados de libertad discretos (internos) con el grado de libertad continuo (\hat{x} : posición del centro de masa del ion). Se parte del Hamiltoniano de un ion de dos niveles, $|e\rangle$ y $|g\rangle$, sujeto al oscilador armónico de la trampa, de modo que:

$$H_0 = \hbar\omega_a \frac{1}{2} \sigma_z + \hbar\omega_0 \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

con $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$.

Se aplica un campo láser de frecuencia ω_L , dado por el operador:

$$E(\hat{x}, t) = E_0 e^{i(\phi + \omega_L t)} e^{-i\eta(a + a^\dagger)} + \text{h.c.} \approx E_0 e^{i\phi} (1 - i\eta(a + a^\dagger)) + \text{h.c.}$$

donde se expandió a primer orden en el parámetro de Lamb-Dicke: $\eta = k_L x_0 \ll 1$, y h.c. es el conjugado Hermitiano de la primera parte.

- (a) Obtenga la expresión del parámetro de Lamb-Dicke η en función de parámetros del problema. ¿En qué casos vale la expansión a primer orden?
- (b) Probar que el Hamiltoniano en el cuadro de interacción es:

$$H_I \approx \Omega e^{i\phi} \left[e^{i(\omega_L - \omega_a)t} - i\eta \left(a e^{i(\omega_L - \omega_a + \omega_0)t} + a^\dagger e^{i(\omega_L - \omega_a - \omega_0)t} \right) \right] \sigma_- + \text{H.c.}$$

- (c) Si se sintoniza el láser de modo que $\omega_L - \omega_a - \omega_0 = 0$, y se descartan términos rotantes con frecuencias ω_0 y $2\omega_0$ (aproximación de onda giratoria, RWA), obtenga el Hamiltoniano de Jaynes–Cummings:

$$H_{JC} = -i\hbar\eta\Omega (e^{i\phi} a^\dagger \sigma_- - e^{-i\phi} a \sigma_+)$$

Note que en esta representación, el Hamiltoniano no depende del tiempo.

P12 **Ion de dos niveles y modelo de Jaynes–Cummings.** Considere el ion de dos niveles $|g\rangle$ y $|e\rangle$ con campo electromagnético. Luego de ciertas consideraciones se obtuvo el Hamiltoniano de Jaynes–Cummings:

$$H_{JC} = -i\hbar\eta\Omega (e^{i\phi} a^\dagger \sigma_- - e^{-i\phi} a \sigma_+),$$

donde $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ y $\sigma_- = \sigma_+^\dagger$.

- (a) Muestre que $[N, H_{JC}] = 0$, por lo que se puede elegir una base común de autoestados.

- (b) Aprovechando lo anterior, muestre que el problema de diagonalizar H_{JC} se reduce al problema de diagonalizar matrices de 2×2 correspondientes a cada número de excitaciones n ($n > 0$). ¿Qué se tiene en el caso de cero excitaciones? Diagonalice el Hamiltoniano de Jaynes–Cummings en cada subespacio invariante.

Ayuda: Al ser un problema de dos estados, podemos usar lo conocido para diagonalizar un sistema general de dos estados, cuyo Hamiltoniano se escribe en la base $\{|e, n-1\rangle = | +n\rangle, |g, n\rangle = | -n\rangle\}$ como

$$H_n = \hbar\Omega\sqrt{n}\hat{b}_n \cdot \vec{\sigma},$$

donde $\hat{b}_n = \sin\phi\hat{x} - \cos\phi\hat{y}$, y las matrices de Pauli se refieren a la base especificada ($\sigma_z = | +n\rangle\langle +n| - | -n\rangle\langle -n|$).

- (c) Calcule el operador de evolución dentro del subespacio con n excitaciones. Observe que para un estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |g, n\rangle$, el sistema realiza oscilaciones de Rabi entre $|g, n\rangle$ y $|e, n-1\rangle$. Calcule la frecuencia de dichas oscilaciones.

V. Enfriamiento por bandas laterales para iones atrapados.

P13 Enfriamiento por bandas laterales

Existen distintos mecanismos para enfriar iones atrapados. Uno de los más usados es el enfriamiento Doppler, que permite alcanzar temperaturas en las centenas de μK . Para reducir aún más la temperatura, puede hacerse enfriamiento por bandas laterales. El régimen que se necesita para hacer este tipo de enfriamiento es el de confinamiento fuerte, en el que el ancho de línea de la transición Γ que se usa para enfriar es mucho menor que la frecuencia del potencial armónico efectivo de la trampa, ω_x . Vamos a considerar un sistema en una dimensión, descrito por el hamiltoniano de interacción del ion con el campo, que acopla sus grados de libertad de movimiento y electrónicos

$$H_{\text{int}} = \vec{d} \cdot \vec{E} e^{i\eta(a^\dagger\sigma_- - a\sigma_+)}.$$

Restringiéndonos al subespacio de la figura, donde $|g\rangle, |e\rangle$ son los estados electrónicos del átomo y $|n\rangle$ el estado de movimiento:

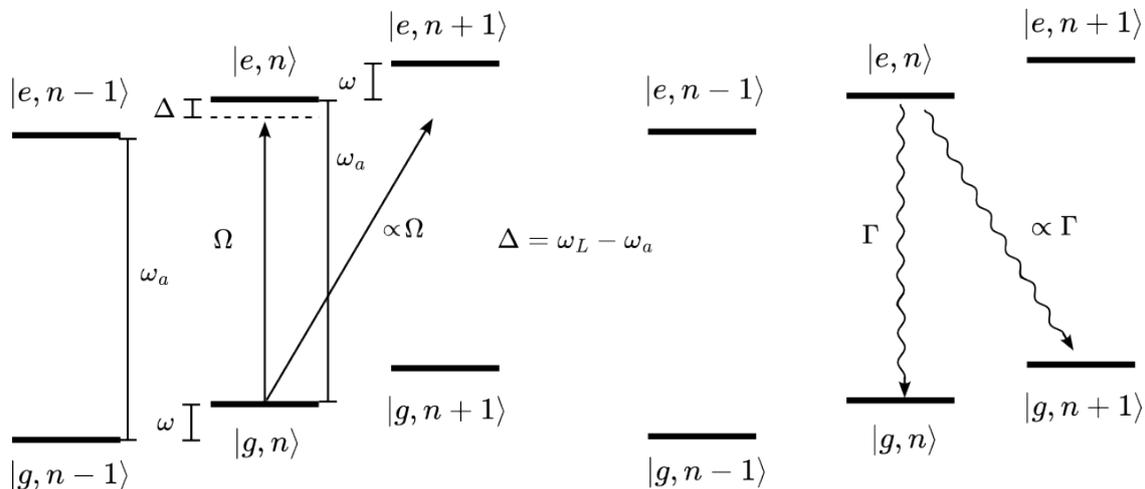


Figura 2:

- (a) Calcular los elementos del hamiltoniano de interacción $\langle m | H_{\text{int}} | n \rangle$ al orden más bajo en η . Escribir las frecuencias de rabi efectivas $\Omega_{\text{azul}} \equiv \Omega_{n,n+1}$ y $\Omega_{\text{rojo}} \equiv \Omega_{n,n-1}$.

- (b) Consideren ahora la probabilidad del sistema de dispersar un fotón. Dado que consideramos al átomo como un sistema de dos niveles, la población del estado excitado en el estacionario está dada por

$$\rho_{ee}(t \rightarrow \infty) \approx \frac{\Omega^2}{\Gamma^2} \frac{1}{1 + (2\Delta/\Gamma)^2},$$

con $\Delta = \omega_L - \omega_a$). A mínimo orden en η , dibuje el diagrama de los decaimientos y excitaciones que enfrían (reducen el n) y los que calientan (aumenta el n) al ion. Escriban cómo es la tasa de decaimiento desde el nivel $|e, n\rangle$ al $|g, n\rangle$ y $|g, n+1\rangle$.

- (c) Ahora escriban la ecuación de tasas para la población del nivel $|g, n\rangle$, es decir, la ecuación diferencial que rige la evolución de $P_{g,n}(t)$. Para construir los términos de las ecuaciones, ayudándose del diagrama del inciso b) y las amplitudes calculadas en el a), construir la probabilidad de cada uno de los procesos que poblan y despoblan el estado $|g, n\rangle$ y multiplicando por la tasa de decaimiento (Γ , el ancho de línea). Igual que en los incisos anteriores, a menor orden en η . **Ayuda:** Son ocho términos que tienen que tener unidades de $1/s$.
- (d) Ahora consideramos al sistema completo. Calcular la evolución del valor medio de fonones en el sistema $\langle n \rangle = \sum n \dot{P}_n$. Encontrar el estado estacionario. ¿Cuál es el límite de enfriamiento del sistema?

P14 Termometría de bandas laterales

En función de cómo es el espectro de bandas laterales, puede estimarse la temperatura del ion. A esta técnica se la llama termometría de bandas laterales. En este caso vamos a mirar la población del estado excitado, tanto cuando sintonizamos nuestro láser a la banda lateral azul ($\Delta = \omega_x$) como a la roja ($\Delta = -\omega_x$).

- (a) A partir del hamiltoniano de Jaynes-Cummings en la base $|e, n\rangle, |g, n\rangle$ y considerando el estado inicial $|\psi(0)\rangle = |g, n\rangle$, encuentren la probabilidad de encontrar al sistema en el estado excitado $|e, n-1\rangle$ y $|e, n+1\rangle$ si el láser se encuentra sintonizado a la banda roja y a la banda azul respectivamente. En estos casos el Hamiltoniano de interacción es $H_{\text{azul}} = \frac{\Omega\eta}{2}(\sigma_+ a^\dagger + \sigma_- a)$ y $H_{\text{rojo}} = \frac{\Omega\eta}{2}(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger)$. Utilice resultados previos, no hace falta hacer todas las cuentas.
- (b) La luz que el ion disperse será proporcional a la población en el estado excitado. Vamos a considerar ahora que el sistema se encuentra en un estado térmico, dado por la distribución

$$p(n) = \frac{\langle n \rangle^n}{(\langle n \rangle + 1)^{n+1}}.$$

Usando esta distribución y el resultado del inciso anterior, encuentre $P_e^{\text{rojo}}(t)$ y $P_e^{\text{azul}}(t)$. A partir del cociente entre estas dos probabilidades (que es equivalente al cociente de la altura de las dos bandas), encuentre un estimador para $\langle n \rangle$. **Ayuda:** Cuando escriban la sumatoria, tengan cuidado desde dónde empieza cada una.

VI. Información cuántica con iones atrapados.

P15 Compuerta de Cirac - Zoller por Cecilia Cormick Para realizar computación cuántica con un conjunto de sistemas de dos niveles (qubits), es suficiente poder aplicar transformaciones unitarias arbitrarias sobre cada uno de los qubits, y al menos un tipo de operaciones unitarias capaces de generar entrelazamiento.

Este ejercicio muestra en forma simplificada cómo es posible, en principio, realizar esta clase de operaciones entre los estados internos de dos iones por medio de un modo normal de oscilación común a los dos. Vamos a considerar que cada ion es un sistema de tres niveles: dos de ellos, $|g\rangle$ y $|e\rangle$, corresponden a los estados de la base computacional, y un tercero, $|e'\rangle$, es puramente auxiliar. La oscilación del modo centro de masa corresponde a un oscilador armónico cuantizado con operadores a y a^\dagger .

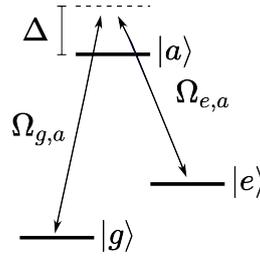


Figura 3:

Por medio de un láser actuando sobre el ion j ($j = 1$ ó 2) con la frecuencia apropiada podemos generar un Hamiltoniano que en una representación rotante con respecto al Hamiltoniano H_0 del sistema libre tome la forma:

$$H_j = \frac{\Omega}{2} (|e\rangle \langle g| a + |g\rangle \langle e| a^\dagger)$$

(es decir es análogo al Hamiltoniano de Jaynes-Cummings del problema 5, y no actúa sobre el nivel $|e'\rangle$). Alternativamente, cambiando la frecuencia y/o la polarización del láser podemos generar un Hamiltoniano H'_j del mismo tipo pero que involucra al estado $|e'\rangle$ en lugar de $|e\rangle$.

Calcular en cada paso los efectos de la siguiente secuencia, suponiendo que el estado inicial es de la forma:

$$|\psi_0\rangle = \frac{|g\rangle + |e\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|g\rangle + |e\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle$$

que es un estado sin entrelazamiento entre los dos iones, y donde el modo se encuentra en su estado fundamental.

- Se aplica el Hamiltoniano H_1 durante un tiempo π/Ω , lo que opera sobre el ion 1 y el modo, mientras que el estado $|g\rangle |0\rangle$ no se modifica.
- Se aplica el Hamiltoniano H'_2 durante un tiempo $2\pi/\Omega$, lo que opera sobre el ion 2 y el modo, mientras que el estado $|g\rangle |0\rangle$ no se modifica, ni tampoco ningún estado en que el ion 2 se encuentre en $|e\rangle$.
- Se aplica nuevamente un pulso igual al del primer paso.

Mostrar que el estado final es un estado en el que el modo vuelve al estado fundamental, mientras que los iones 1 y 2 se encuentran en un estado máximamente entrelazado de dos qubits, es decir, sus matrices densidad reducidas son máximamente mixtas mientras que el estado del sistema conjunto es puro.

VII. Átomo de tres niveles. Atrapamiento coherente de poblaciones

P16 **Átomo de tres niveles.** *por Cecilia Cormick* Consideramos un átomo con tres niveles internos, que llamamos $|g\rangle$, $|e\rangle$ y $|a\rangle$ (por “auxiliar”). Los niveles $|g\rangle$ y $|e\rangle$ están conectados con $|a\rangle$ a través de transiciones dipolares, pero no hay una transición directa que los conecte entre sí. Es posible sin embargo conectarlos utilizando el nivel $|a\rangle$ como paso intermedio, en una situación que involucra dos láseres, cada uno de ellos muy lejos de la resonancia (ver figura). Este se conoce como un sistema Λ (aquí no es importante la relación de energías entre $|g\rangle$ y $|e\rangle$, pero sí que ambos niveles sean metaestables).

Tomando el cero de energía en el nivel $|g\rangle$ y usando una aproximación de onda rotante, el Hamiltoniano del sistema es de la forma:

$$H = E_e |e\rangle \langle e| + E_a |a\rangle \langle a| + \hbar \frac{\Omega_1}{2} (|a\rangle \langle g| e^{-i\omega_1 t} + |g\rangle \langle a| e^{i\omega_1 t}) + \hbar \frac{\Omega_2}{2} (|a\rangle \langle e| e^{-i\omega_2 t} + |e\rangle \langle a| e^{i\omega_2 t})$$

donde $\omega_1 = \frac{E_a}{\hbar} + \Delta$, $\omega_2 = \frac{E_a - E_e}{\hbar} + \Delta$. Asumimos que Ω_j es real (en este caso esto no implica una pérdida de generalidad). Para los cálculos que siguen vamos a concentrarnos en la evolución dada por el Hamiltoniano.

- (a) Pasar a una representación rotante con el láser, es decir tomando $H_0 = E_e |e\rangle \langle e| + \hbar\omega_1 |a\rangle \langle a|$, de modo que el Hamiltoniano H' en esta representación está dado por:

$$H'(t) = U_0(t)^\dagger H U_0(t) - H_0$$

donde $U_0(t) = e^{-iH_0 t/\hbar}$. Calcular $H'(t)$ y mostrar que resulta independiente del tiempo.

- (b) Definimos ahora combinaciones lineales de $|g\rangle$ y $|e\rangle$ que corresponden a un estado “oscuro” y uno “brillante”:

$$|o\rangle = \frac{\Omega_2}{\Omega} |g\rangle - \frac{\Omega_1}{\Omega} |e\rangle, \quad |b\rangle = \frac{\Omega_1}{\Omega} |g\rangle + \frac{\Omega_2}{\Omega} |e\rangle$$

donde $\Omega^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2$. Verificar que $H'|o\rangle = 0$, es decir efectivamente $|o\rangle$ es un estado oscuro del sistema (si la emisión espontánea lleva al átomo a este estado, entonces se mantendrá en él).

- (c) Verificar también que el Hamiltoniano resultante se puede escribir en la forma:

$$H' = -\hbar\Delta |a\rangle \langle a| + \hbar\frac{\Omega}{2} (|a\rangle \langle b| + |b\rangle \langle a|)$$

- (d) Supongamos ahora que la desintonía $|\Delta|$ es mucho más grande que Ω y que el ancho de línea del nivel $|a\rangle$. En este caso, las transiciones que llevan al nivel $|a\rangle$ están lejos de resonancia mientras que los procesos de dos fotones son resonantes. Por analogía con lo visto en el problema 2, podemos reemplazar el efecto del láser como una corrección del nivel $|b\rangle$ en un valor $\Omega^2/(4\Delta)$. Olvidándonos por un rato del nivel $|a\rangle$, este efecto se puede pensar como un término efectivo en el Hamiltoniano de la forma:

$$H_{\text{eff}}^a = \frac{\Omega^2}{\Delta} |b\rangle \langle b|$$

Mostrar que este Hamiltoniano efectivo incluye términos de acoplamiento entre $|g\rangle$ y $|e\rangle$ con una frecuencia de Rabi efectiva igual a $|\Omega_1\Omega_2/(2\Delta)|$.