

Guia 4 - Bifurcaciones en 2D

Dinámica No Lineal - Cátedra G. Mindlin 2do Cuatrimestre 2026

Nota: los problemas que figuran con (*) son obligatorios. El resto son optativos, pero recomendados.

1. Para cada uno de los siguientes sistemas encuentre los autovalores como función de μ . Dibuje el campo vector para $\mu = 0$ y $\mu \neq 0$. ¿Cuánto valen los autovalores en la bifurcación?

$$\begin{array}{lll} \dot{x} = \mu - x^2 & \dot{x} = \mu x - x^2 & (*) \quad \dot{x} = \mu x - x^3 \\ \dot{y} = -y & \dot{y} = -y & \dot{y} = -y \end{array}$$

2. (*) Encuentre y clasifique todas las bifurcaciones del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - ax \\ \dot{y} &= -by + x/(1+x) \end{aligned}$$

3. (*) **Gusanos vs Bosque.** Ludwig propuso un modelo para los efectos de una población de gusanos en un bosque de abetos. Se asume que la condición del bosque está caracterizada por $S(t)$ (tamaño promedio de los árboles) y $E(t)$, reserva de energía (una medida de la salud del bosque). En presencia de una población constante de gusanos B , la dinámica del bosque está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= r_S S \left(1 - \frac{S}{K_S} \frac{K_E}{E} \right) \\ \dot{E} &= r_E E \left(1 - \frac{E}{K_E} \right) - P \frac{B}{S} \end{aligned}$$

donde $r_S, r_E, K_S, K_E, P > 0$.

- (a) Interprete los términos en el modelo biológico.
 - (b) Adimensionalice el sistema.
 - (c) Dibuje las nulclinas. Mostrar que si B es chico hay 2 puntos fijos, y ninguno si B es grande. ¿Qué tipo de bifurcación ocurre para el valor crítico B_c ?
 - (d) Dibuje el retrato de fases para B chico y B grande.
4. (*) Considere el sistema

$$\dot{x} = y + ax(1 - 2b - r^2), \quad \dot{y} = -x + ay(1 - r^2)$$

donde a y b son parámetros ($0 < a < 1, 0 < b < 1/2$) y $r^2 = x^2 + y^2$.

- (a) Reescriba el sistema en coordenadas polares.
 - (b) Pruebe que tiene al menos una órbita periódica, y que si tiene más de una todas tienen el mismo período $T(a, b)$. Recuerde que $T(a, b) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\dot{\theta}(a, b)}$ donde θ es el ángulo en polares.
 - (c) Pruebe que para $b = 0$ hay solo una órbita periódica.
5. (*) Estudie el sistema $\dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos \theta, \dot{\theta} = 1$.
- (a) Por medio de simulaciones numéricas, vea si existe un parámetro $\mu > 0$ crítico donde la órbita periódica desaparece.
 - (b) Usando el teorema de Poincaré-Bendixon muestre que hay una órbita periódica en el anillo $\sqrt{1 - \mu} < r < \sqrt{1 + \mu}$ para todo $\mu < 1$.
 - (c) Para aproximar la forma de $R(\theta)$ de la órbita para $\mu \ll 1$, asuma una serie de potencias de la forma $r(\theta) = 1 + \mu r_1(\theta) + O(\mu^2)$. Sustituya esta solución en la ecuación diferencial $dr/d\theta$ y aproxime tirando los términos de orden $O(\mu^2)$. Obtenga entonces una ecuación diferencial para $r_1(\theta)$, y resuélvala. Esta aproximación se conoce como *perturbación regular*.

- (d) Muestre que la solución está dentro del anillo encontrado previamente.
- (e) Compare mediante simulaciones numéricas la solución analítica encontrada y exacta. ¿Cómo depende el error de μ ?
6. (*) **Bifurcación de Hopf.** Para cada uno de los siguientes sistemas muestre que el origen tiene una bifurcación de Hopf en $\mu = 0$ y, mediante simulaciones numéricas, verifique si la misma es subcrítica o supercrítica.
- (a) (*) $\dot{x} = y + \mu x, \quad \dot{y} = -x + \mu y - x^2 y$
- (b) (*) $\dot{x} = \mu x + y - x^3, \quad \dot{y} = -x + \mu y + 2y^3$
- (c) $\dot{x} = \mu x + y - x^2, \quad \dot{y} = -x + \mu y + 2x^2$
7. (*) **Predador-presa.** Considere el sistema predador-presa,

$$\dot{x} = x \left(b - x - \frac{y}{1+x} \right), \quad \dot{y} = y \left(\frac{x}{1+x} - ay \right)$$

donde $x, y \geq 0$ son las poblaciones y $a, b > 0$ son parámetros.

- (a) Dibuje las nulclinas y discuta las bifurcaciones que ocurren si b cambia.
- (b) Usando un método gráfico muestre que hay un punto fijo $x^*, y^* > 0$, para todo $a, b > 0$.
- (c) Muestre que ocurre una bifurcación de Hopf en (x^*, y^*) si $a = a_c = \frac{4(b-2)}{b^2(b+2)}$, donde $b > 2$.
- (d) Mediante simulaciones numéricas, compruebe el resultado anterior y muestre si la bifurcación es subcrítica o supercrítica.
8. **Dinámica de poblaciones.** Considere el siguiente problema de dinámica de poblaciones, donde ambas tienen una capacidad de carga finita,

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= r_1 N_1 (1 - N_1/K_1) - b_1 N_1 N_2 \\ \dot{N}_2 &= r_2 N_2 (1 - N_2/K_2) - b_2 N_1 N_2\end{aligned}$$

- (a) Adimensionalice el modelo. ¿Cuántos grupos adimensionales son necesarios?
- (b) Muestre que hay 4 retratos de fases cuantitativamente distintos, en términos del comportamiento asintótico del sistema.
- (c) Encuentre las condiciones por las cuales las dos poblaciones pueden coexistir establemente. Explique el significado biológico de la condición.
Hint: la capacidad de carga refleja la competencia dentro de la misma especie, donde b refleja la competencia entre especies.
9. **Modelo epidemiológico.** En un trabajo pionero Kermack y McKendrick (1927) propusieron un modelo sencillo para la evolución de las epidemias. Suponga que la población puede dividirse en 3 tipos: $x(t)$ = número de individuos sanos; $y(t)$ = número de individuos infectados; $z(t)$ = número de individuos fallecidos. En una versión más optimista, conocida como SIR, la tercera población se identifica con individuos recuperados. El modelo es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -kxy \\ \dot{y} &= kxy - ly \\ \dot{z} &= ly\end{aligned}$$

donde k y l son constantes positivas. El modelo se basa en

- Los individuos sanos se enferman a un ritmo proporcional al producto de x e y ,
- Los enfermos mueren a una tasa l .

Este sistema puede analizarse de diversas formas (ver p. ej ejercicio 3.7.6 del Strogatz para un método de reducción a 1D). La idea es analizar este problema en el espacio de fases 2D, notando que puede omitirse la evolución de la variable z .

- (a) Encuentre y clasifique todos los puntos fijos.

- (b) Haga un dibujo de las nulclinas y del campo vector.
 - (c) Encuentre una cantidad que se conserve en el sistema.
 - (d) Haga un retrato de fases. ¿Qué pasa en $t \rightarrow \infty$?
 - (e) Sea (x_0, y_0) una condición inicial. Una epidemia ocurre cuando $y(t)$ aumenta inicialmente. ¿Bajo qué condiciones esto ocurre?
10. **Sistema excitable.** Un modelo clásico de excitabilidad es el de Fitzhugh-Nagumo, que modela el potencial de acción de una membrana celular:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a + bx + x^2 - xy\end{aligned}$$

- (a) Dibuje las nulclinas, encuentre los puntos fijos gráficamente y construya un retrato de fases aproximado para las siguientes condiciones de parámetros: (i) $b > 0, a < 0$, (ii) $b < 0, a > 0$ y $b \gg a$.
- (b) Halle una relación explícita entre los parámetros del sistema para que se produzca una bifurcación *saddle-node*.
- (c) Encuentre la condición para que se produzca una bifurcación de Hopf.
- (d) En el espacio de parámetros (a, b) , represente como curvas las dos condiciones anteriores y ensaye un retrato de fases en cada una de las regiones en las que queda dividido el plano. A partir del gráfico deduzca la necesidad de una conexión homoclínica adicional a las bifurcaciones anteriores.