Complemento para la segunda clase de mapas

Ejercicio 1

Pueden acompañar este ejercicio con el visualizador casero: https://p-quinto.github.io/Mapa-de-poincare/. Lo que más se recomienda es que utilicen ejemplos de resultados de las cuentas, metiéndolos manualmente en los valores de los parámetros, y así vean qué pasa en cada caso.

(a)

1. (*) **Construcción de un Mapa de Poincaré.** Considere la siguiente ecuación diferencial de un oscilador forzado periódicamente con disipación $\delta > 0$:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \cos(\omega t)$$

   (a) Encuentre la solución general del sistema homogéneo teniendo en cuenta los valores posibles de $\delta^2 - 4\omega_0^2$. ¿A qué tiende la solución $x_h(t)$ con t tendiendo a infinito?

La ecuación homogénea es:

$$\ddot{x}_h + \delta\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$$

Proponemos solución $x_h = e^{rt}$, lo que nos da la ecuación característica:

$$r^2 + \delta r + \omega_0^2 = 0 \implies r = \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

Dependiendo del discriminante, tenemos tres casos:
Sobreamortiguado ($\delta^2 - 4\omega_0^2 > 0$)**:** Dos raíces reales negativas.

$$x_h(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Críticamente amortiguado ($\delta^2 - 4\omega_0^2 = 0$)**:** Raíz real doble $r = -\delta/2$.

$$x_h(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\delta t/2}$$

Subamortiguado ($\delta^2 - 4\omega_0^2 < 0$)**:** Raíces complejas conjugadas $r = -\frac{\delta}{2} \pm i\omega_d$, donde $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\delta^2}{4}}$.

$$x_h(t) = e^{-\delta t/2}(c_1 \cos(\omega_d t) + c_2 \sin(\omega_d t))$$

Al haber disipación ($\delta > 0$), el término $e^{-\delta t/2}$ siempre decae a cero. Luego, la solución homogénea $x_h(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. A esto lo llamamos el *transitorio*. La solución a largo plazo estará dominada puramente por la fuerza externa (la solución particular).

—

(b)

(b) Halle la solución particular $x_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. Escriba la solución general $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ para el caso $\delta^2 - 4\omega_0^2 < 0$ y obtenga los valores de las constantes. Dé su expresión a partir de las condiciones iniciales (x_0, y_0) en $t = 0$.

Buscamos una solución particular de la forma $x_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. Derivando y reemplazando en la ecuación original $\ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \cos(\omega t)$, e igualando los coeficientes del seno y el coseno, llegamos al sistema:

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) + B(\delta\omega) = 1$$
$$-A(\delta\omega) + B(\omega_0^2 - \omega^2) = 0$$

Resolviendo este sistema obtenemos:

$$A = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\delta\omega)^2}$$

$$B = \frac{\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\delta\omega)^2}$$

Para el caso $\delta^2 - 4\omega_0^2 < 0$ (subamortiguado), sumamos la homogénea y la particular:

$$x(t) = e^{-\delta t/2}[c_1\cos(\omega_d t) + c_2\sin(\omega_d t)] + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

Buscamos (x_0, y_0) en $t = 0$:
Evaluamos $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = y_0$.

$$x(0) = c_1 + A = x_0 \implies \mathbf{c_1 = x_0 - A}$$

Para $\dot{x}(0)$, derivamos $x(t)$ y evaluamos en 0:

$$y_0 = -\frac{\delta}{2}c_1 + c_2\omega_d + B\omega \implies \mathbf{c_2} = \frac{\mathbf{1}}{\omega_\mathbf{d}}\left[\mathbf{y_0} + \frac{\delta}{\mathbf{2}}(\mathbf{x_0 - A}) - \mathbf{B}\omega\right]$$

—

(c)

(c) Reescriba la ecuación del oscilador como un sistema de ecuaciones y conviértala en un sistema autónomo definiendo la variable $\dot{\theta} = \omega$.

Para pasar de una ecuación de segundo orden en 1D a un sistema de primer orden en 2D, definimos $y = \dot{x}$:

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\omega_0^2 x - \delta y + \cos(\omega t)$$

Como el tiempo t aparece explícitamente en el coseno, el sistema no es autónomo. Para volverlo autónomo definimos θ tal que $\dot{\theta} = \omega$ (es decir, $\theta = \omega t$). El sistema queda:

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\omega_0^2 x - \delta y + \cos\theta$$
$$\dot{\theta} = \omega$$

Ahora tenemos un flujo en un espacio de fases cilíndrico $R^2 \times S^1$ (recordamos que S^1 es un espacio cíclico, en este caso que va de 0 a 2π... https://en.wikipedia.org/wiki/Cyclic_subspace).

—

(d)

(d) Defina la sección Σ de Poincaré correspondiente a la condición $\theta = 0 \in S^1$. Encuentre el tiempo T que transcurre entre cada intersección del flujo con Σ. Escriba, a partir de la solución en b) con las condiciones iniciales, el mapa $P : \Sigma \to \Sigma$.

La sección de Poincaré Σ se define en $\theta = 0 \pmod{2\pi}$. Por lo tanto, tiempo que transcurre entre cada intersección es el período de la fuerza externa: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (si te confunde la facilidad de esta respuesta, otra manera de encontrarla es preguntarse "¿Cada cuánto tiempo ocurre que $\theta = 0$?", y la respuesta ¡Está en la definición de la variable!)

El mapa $P : \Sigma \to \Sigma$ toma un punto (x_n, y_n) en $t = 0$ y nos devuelve (x_{n+1}, y_{n+1}) en $t = T$. Para escribirlo evaluamos la solución del inciso (b) en $t = T$. En $t = T$, $\cos(\omega T) = \cos(2\pi) = 1$ y $\sin(\omega T) = 0$. Entonces la parte particular se vuelve simplemente $(A, B\omega)$.

El mapa, escrito en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = e^{-\delta T/2} \begin{pmatrix} \cos(\omega_d T) + \frac{\delta}{2\omega_d}\sin(\omega_d T) & \frac{1}{\omega_d}\sin(\omega_d T) \\ -\frac{\omega_0^2}{\omega_d}\sin(\omega_d T) & \cos(\omega_d T) - \frac{\delta}{2\omega_d}\sin(\omega_d T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n - A \\ y_n - B\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ B\omega \end{pmatrix}$$

—

(e)

(e) Compruebe que $(x, y) = (A, \omega B)$ es un punto fijo del mapa. Encuentre los autovalores de su parte lineal. ¿Es este punto asintóticamente estable? Dibuje la trayectoria de los puntos en el plano (x, y).

Punto fijo:

Si evaluamos el mapa en $(x_n, y_n) = (A, B\omega)$, el vector de diferencias se hace cero. El mapa nos devuelve exactamente $(A, B\omega)$.

Esto significa que si el oscilador está exactamente en fase con la fuerza externa, y toma los valores de la solución particular, cuando el estroboscopio vuelve a destellar (en $t = T$), el oscilador está exactamente en el mismo estado. Es un ciclo límite forzado.

Autovalores:

La parte lineal del mapa es la matriz de arriba. Sus autovalores provienen de la solución homogénea, son directamente:

$$\lambda_{1,2} = e^{r_{1,2}T} = e^{(-\delta/2 \pm i\omega_d)T} = e^{-\delta T/2} e^{\pm i\omega_d T}$$

Su módulo es $|\lambda| = e^{-\delta T/2}$.

¿Es estable?

¿Es el módulo mayor o menor que 1? (y por qué nos importa específicamente el valor "1")

—

(f)

(f) ¿Qué ocurre cuando hay resonancia $\omega = (1/2)\sqrt{4\omega_0^2 - \delta^2}$?

La condición de resonancia que nos dan es $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \delta^2}$. Si elevamos al cuadrado, vemos que es exactamente $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\delta^2}{4}$, es decir, $\omega = \omega_d$. La frecuencia de la fuerza externa coincide exactamente con la frecuencia natural del sistema subamortiguado.

¿Qué pasa en el mapa de Poincaré cuando $\omega = \omega_d$? El tiempo entre destellos es $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$. Si evaluamos los términos trigonométricos del mapa: $\cos(\omega_d T) = \cos(2\pi) = 1$ y $\sin(\omega_d T) = 0$. La matriz del mapa se vuelve diagonal:

$$M = \begin{pmatrix} e^{-\delta T/2} & 0 \\ 0 & e^{-\delta T/2} \end{pmatrix}$$

El mapa se reduce a:

$$x_{n+1} = A + e^{-\delta T/2}(x_n - A)$$
$$y_{n+1} = B\omega + e^{-\delta T/2}(y_n - B\omega)$$

En lugar de que los puntos salten en espiral alrededor del punto fijo, ahora caen en línea recta directamente hacia el punto fijo. Físicamente, cada vez que el estroboscopio destella, el oscilador se ve un poco más cerca de la amplitud de resonancia, pero siempre en la misma fase exacta.

Ejercicio 4

Este lo hacen sin más ayuda nuestra que este visualizador, mucho más fluido e interactivo:
https://hbocaccio.github.io/logistic-map/

Esto no significa que lo tengan que hacer en soledad... ¡Se pueden juntar entre ustedes! Lo único que nos pondría más contentos que producir amistades, es producir enemistades. Y para ambas se necesita una actitud gregaria.