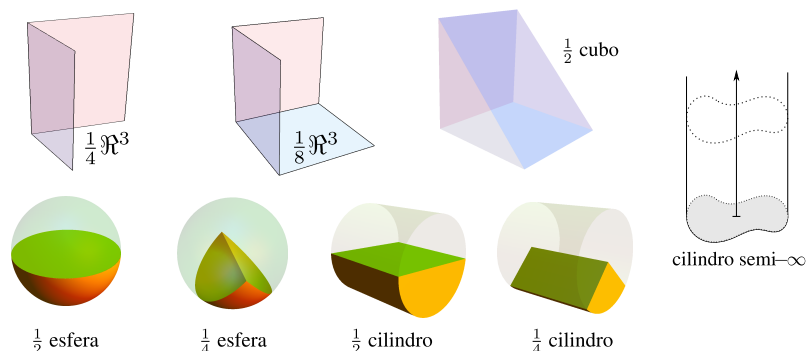


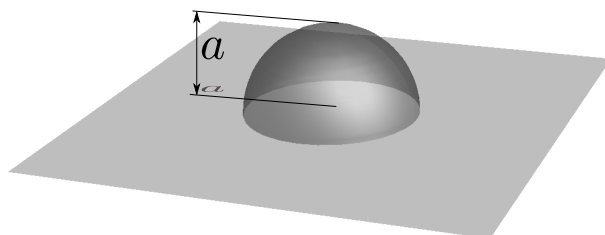
GUÍA 2: MÉTODOS ANALÍTICOS PARA PROBLEMAS CON CONDICIONES SOBRE LA FRONTERA EN ELECTROMAGNETISMO
(FUNCIÓN DE GREEN, MÉTODO DE IMÁGENES Y SEPARACIÓN DE VARIABLES)

Método de imágenes y de la función de Green.

- Una esfera conductora de radio a está conectada a potencial V y rodeada por una cáscara esférica de radio b cargada uniformemente con densidad σ :
 - Hallar el potencial electrostático en todo el espacio.
 - Encontrar la distribución de carga imagen y la carga total inducida sobre la esfera conductora. ¿Es única la distribución de carga imagen que resuelve el problema?
- Hallar el potencial electrostático del problema anterior en la región $r \geq a$, utilizando el método de la función de Green.
 - Analizar la relación entre el método de imágenes y el de la función de Green. Identificar la procedencia de cada una de las tres contribuciones a la integral de Green.
- (sin cuentas.) Las funciones de Green de Dirichlet del espacio no acotado, de la esfera, del interior de un cubo, del interior de un cilindro finito de base circular y del interior de un cilindro infinito de sección arbitraria se suponen conocidas. Usando argumentos de simetría, escriba en términos de estas funciones de Green las funciones de Green en el interior de los siguientes recintos:

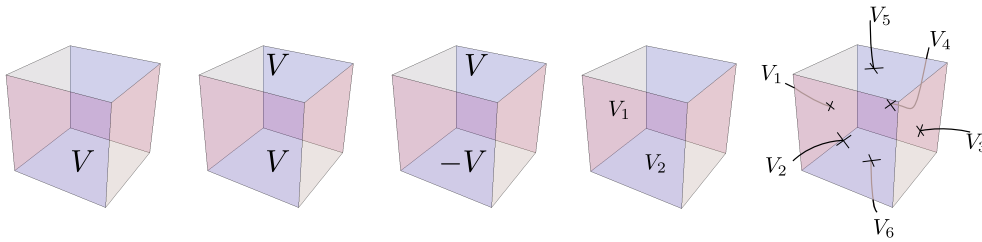


- (casi sin cuentas.) La superficie conductora de la figura representa un plano infinito con una deformación semiesférica de radio a . Calcular la función de Green tipo Dirichlet en la región por encima de esta frontera. Identificar cada contribución.

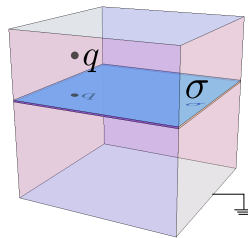


Separación de variables en coordenadas cartesianas.

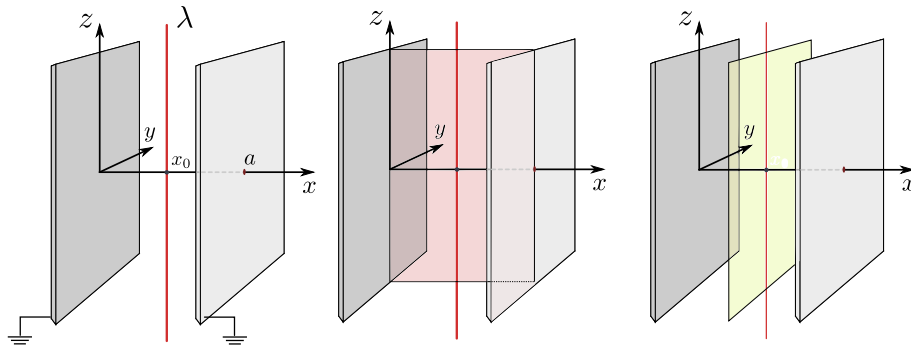
5. Un cubo de lado a tiene sus tapas al potencial que muestra cada figura. Las tapas donde no se indica ningún valor del potencial están a tierra. Encontrar el potencial en el **interior** del cubo en cada caso.



6. Un cubo de lado a está conectado a tierra. Calcular el potencial electrostático **en todo el espacio** cuando en su *interior* hay:
- (a) una carga puntual q ubicada en $\mathbf{r}'$.
 - (b) un cuadrado con densidad superficial uniforme σ y una carga puntual q , como muestra la figura.



7. Los planos $z = 0$ y $z = a$ están a potenciales $V_1(x, y)$ y $V_2(x, y)$. Hallar el potencial en todo el espacio.
8. Calcular el potencial y el campo electrostático en todo punto del espacio producido por un cuadrado cargado con densidad uniforme σ . Puede asumirse que el cuadrado está sobre el plano xy , que su centro coincide con el origen y que sus lados están alineados con los ejes x e y .
9. Un alambre con densidad de carga uniforme λ está equidistante a dos placas conductoras infinitas conectadas a tierra, como muestra la figura ($x_0 = a/2$). Utilizando separación de variables, encuentre el potencial **en todo el espacio**. Para ello divida la región entre las placas de los siguientes modos:
- (a) Con un corte vertical perpendicular a los planos.
 - (b) Con un corte vertical paralelo a los planos.
 - (c)* Compare las dos formas de la solución. ¿Se atreverá a demostrar la igualdad de las dos expresiones sin usar el teorema de unicidad?
 - (d)* Tanto la integral como la suma de Fourier que han aparecido al aplicar las dos separaciones pueden hacerse de manera explícita y la solución es una función simple. Encuentre esa función.



10. (a) Encuentre por separación en cartesianas la función de Green de Dirichlet del espacio no acotado. Para eso, divida el espacio en dos regiones con un plano paralelo al plano xy ; la solución debe quedar escrita en la forma

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y')]} \phi(k_x, k_y) f_{k_x k_y}(z - z').$$

- (b)* Encuentre la función de Green de Dirichlet del espacio no acotado proponiendo para G un desarrollo de Fourier tridimensional,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int d^3\mathbf{p} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \phi(\mathbf{p}),$$

y resolviendo directamente la ecuación de Poisson, $\nabla_{\mathbf{r}}^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

- (c)* Comparando las dos formas de la función de Green del espacio no acotado obtenidas en los ítems anteriores, encuentre la transformada de Fourier de la función $f(z) = e^{-\kappa|z|}/\kappa$.

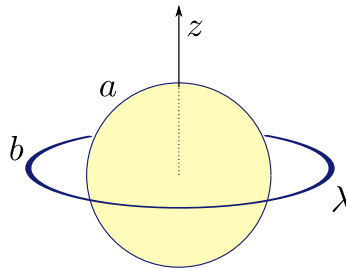
11. Encuentre la función de Green para el problema de Dirichlet en el interior de un cilindro de sección cuadrada de lado a y de longitud:

- (a) infinita, es decir: $0 \leq x, y \leq a, -\infty \leq z < \infty$.
 (b) semi-infinita, es decir, $0 \leq x, y \leq a, 0 \leq z < \infty$.
 ¿Puede utilizar el resultado del ítem anterior? (ayuda: usar el método de imágenes).

Separación de variables en coordenadas esféricas.

12. (a) Calcular el potencial de una carga puntual q entre dos cáscaras esféricas conductoras, concéntricas y conectadas a tierra, de radios a y b respectivamente.
 (b) Hallar la densidad de carga y la carga total inducida sobre cada esfera.
 (c) Observar qué sucede cuando se hace tender el radio de la esfera exterior a infinito ¿Cuánto valen las cargas totales inducidas en ese caso?
 (d) Resolver el problema en el caso en que los potenciales de las esferas se elevan a V_1 y V_2 . (Ver último problema de la guía 1).
 (e) Resolver el problema en el caso en que las esferas están aisladas y tienen una carga total Q_1 y Q_2 .

13. Calcular el potencial electrostático en todo punto del espacio para una esfera cuya mitad superior está conectada a un potencial V_1 y la inferior a V_2 . Sugerencia: puede resolver el problema directamente, o puede descomponerlo en la suma de otros más simples que tengan simetría de reflexión bien definida, es decir, como un suma de algo par más algo impar; esto simplifica las integrales.
14. Una esfera de radio a está a tierra. Concéntrico con ella hay un anillo de radio $b > a$, cargado uniformemente con carga total Q .



- (a) Calcular el potencial $\Phi(\mathbf{r})$ para $r > a$ usando separación de variables.
- (b) Interpretar el resultado mediante la superposición $\Phi = \Phi_a + \Phi_b$, como la contribución del anillo Φ_b mas la del conductor Φ_a .
- (c) Hallar la densidad de carga y la carga total inducida sobre la esfera.
- (d) Mediante lo analizado en los dos ítems anteriores, diga cómo es la distribución y el potencial imagen para el problema exterior.
- (e) ¿Cómo resolvería el problema si la esfera estuviera aislada y descargada?

Fórmulas útiles: $P_{2n+1}(0) = 0$, $P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}$, $P_0(x) = 1$, $P_l(1) = 1$.

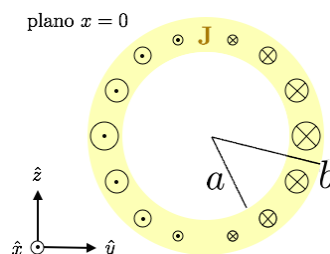
Separación de variables en coordenadas cilíndricas.

15. Un cilindro de radio a y altura L tiene su superficie lateral conectada a tierra, mientras que las tapas se mantienen a potenciales V y $-V$. Hallar el potencial en el interior del cilindro.
16. Encontrar la función de Green con condiciones de Dirichlet para el problema interno de un cilindro circular de radio a y longitud L , separando en regiones de las siguientes maneras:
- (a) Cortando con un plano perpendicular al eje del cilindro.
- (b) Cortando con un cilindro coaxial al cilindro original.
17. Ídem al problema anterior pero para un cilindro de longitud infinita. Encuentre también la función de Green para el problema externo utilizando el segundo tipo de corte. ¿Sabría cómo resolver el problema externo usando el primer tipo de corte?
18. (a) Usando separación de variables en coordenadas cilíndricas, hallar el potencial y el campo electrostático producidos por un disco de radio a cargado con densidad uniforme σ .
- (b) A través de límites adecuados, verificar que la expresión obtenida se reduce en un caso a la de una carga puntual, y en otro a la de un plano infinito.
- (c) ¿El disco puede ser considerado un conductor?

19. Encontrar la función de Green con condiciones de Dirichlet para el problema interno de una estructura con forma de cuarto de cilindro circular, infinito y de radio a , siguiendo estos dos caminos:
- Usando separación de variables en el cuarto de cilindro a partir de la ecuación para $\nabla^2 \Phi$ en coordenadas cilíndricas y con condiciones de contorno adecuadas.
 - Usando imágenes y la función de Green para el cilindro infinito obtenida en el problema anterior.
- (c) Además del problema del cuarto de cilindro, que corresponde a un ángulo de $\alpha = \pi/2$ entre las tapas planas laterales, ¿para qué otros valores α puede resolverse el problema usando imágenes?
20. (a) Usando separación en coordenadas cilíndricas, calcular la función de Green con condiciones de Dirichlet para la región interna entre dos planos infinitos, ubicados en $z = 0$ y $z = L$.
- (b) Si se coloca una carga q a una altura z entre los planos, calcular las densidades de carga y las cargas totales inducidas sobre cada plano.
- (c)* Observe que si bien la densidad superficial no tiene una expresión muy simple, el resultado para la carga total es llamativamente simple. La carga total sobre cada plano puede obtenerse de consideraciones más generales que no requieren calcular el potencial explícitamente. Lo que se usa es el llamado Teorema de Reciprocidad. Entre los problemas del capítulo 1 del Jackson figura este teorema y su aplicación al caso de los dos planos. En la tercera edición son los problemas 1.12 y 1.13. Quedan propuestos como problemas opcionales.

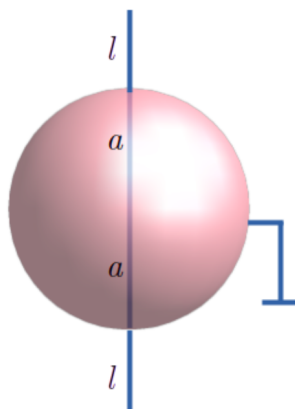
Aplicación de la función de Green y método de imágenes.

21. Utilizando el método de la función de Green, resuelva nuevamente:
- El problema 8., con la expresión obtenida en el problema 10.a.
 - El problema 14.
- * Calcular el potencial sobre el eje perpendicular al plano del anillo utilizando el método de imágenes. Luego, extender la solución para todos los puntos exteriores a la esfera mediante prolongación analítica (Jackson, sección 3.3, donde dice "Series (3.33), with its coefficients determined by the boundary..."). Comparar con el resultado obtenido anteriormente.
- El problema 18.
22. Una densidad volumétrica de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = j_0 \sin \theta \hat{\varphi}(\varphi)$ ocupa la región $a < r < b$. Utilizar la integral de Poisson para calcular el potencial vector $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ en todo el espacio usando coordenadas esféricas. A partir de $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ calcular el campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. (Ayuda: en la integral de Poisson, escribir $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ según el desarrollo en armónicos esféricos.)



Problema 22.

23. Una esfera de radio a está a tierra. Por el centro de la esfera pasa una línea de longitud $d = 2(a + l)$ uniformemente cargada. Encontrar el potencial en todo el espacio.



Problema 23.

24. Un dipolo puntual $\mathbf{p}$ se ubica frente a una esfera de radio a conectada a tierra, a una distancia $d > a$ de su centro.
- (a) Calcular el potencial en todo el espacio usando el método de la función de Green.
 - (b) Ídem (a) pero mediante el método de imágenes. Verificar que ambos resultados coinciden.
 - (c) Calcular la densidad de carga inducida sobre la esfera y la carga total.
 - (d) Escribir el potencial para $r \gg a$ conservando términos de hasta orden $(a/r)^2$. Interprete en términos de la carga total y del momento dipolar total de las cargas fuentes e imágenes.