Operadores vectoriales en coordenadas curvilíneas ortogonales

Pablo Cobelli

Estructura de la Materia 1

1. Coordenadas curvilíneas ortogonales

Estas son las expresiones para los operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas ortogonales:

$$\nabla V = \frac{1}{h_1}\frac{\partial V}{\partial \xi_1}\hat{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial \xi_2}\hat{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial V}{\partial \xi_3}\hat{e}_3 \tag{1}$$

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}(h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}(h_3 h_1 F_2) + \frac{\partial}{\partial \xi_3}(h_1 h_2 F_3)\right] \tag{2}$$

$$\nabla \times F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{e}_1 & h_2\hat{e}_2 & h_3\hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix} \tag{3}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial V}{\partial \xi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial \xi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial V}{\partial \xi_3}\right)\right] \tag{4}$$

Como vemos, son en realidad sencillas de memorizar debido a la simetría de las expresiones. Veamos cómo interpretarlas y cómo usarlas.

Por un lado, tenemos las coordenadas cartesianas habituales, que denominaremos x, y y z. Y supongamos que tenemos un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales con componentes dadas por:

$$\xi_1 = \xi_1(x, y, z) \tag{5}$$

$$\xi_2 = \xi_2(x, y, z) \tag{6}$$

$$\xi_3 = \xi_3(x, y, z) \tag{7}$$

Supongamos que tenemos la superficie dada, por ejemplo, por la expresión

$$\xi_3(x, y, z) = \text{constante}.$$

En ese caso, si dx, dy y dz son las componentes de un desplazamiento sobre esa superficie, debe valer

$$d\xi_3 = \frac{\partial \xi_3}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \xi_3}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \xi_3}{\partial z}\,dz = 0,$$

es decir que el gradiente de $\xi_3(x, y, z)$ debe ser perpendicular a la superficie. La norma de este vector es

$$\frac{1}{h_3} = |\vec{\nabla}\xi_3| = \left[\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2},$$

por lo cuál el versor normal a dicha superficie puede definirse como

$$\hat{e}_3 = h_3 \vec{\nabla}\xi_3.$$

Es posible extender fácilmente estas mismas definiciones a las otras componentes del sistema de coordenadas curvilíneas que tenemos. Complementariamente, podemos definir los factores de escala h_1, h_2 y h_3 como:

$$h_1 = \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1}\right|, \tag{8}$$

$$h_2 = \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2}\right|, \tag{9}$$

$$h_3 = \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_3}\right|. \tag{10}$$

2. Consideremos, por ejemplo, coordenadas esféricas

En esféricas, tenemos

$$x = r \sin\theta \cos\phi \tag{11}$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi \tag{12}$$

$$z = r \cos\theta \tag{13}$$

con $0 \leq \theta \leq \pi$, y $0 \leq \phi \leq 2\pi$. En este caso, serían $\xi_1(x, y, z) = r(x, y, z)$, $\xi_2(x, y, z) = \theta(x, y, z)$, y $\xi_3(x, y, z) = \phi(x, y, z)$.

Calculemos los factores de escala h_1, h_2 y h_3. Tenemos:

$$h_1 = \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1}\right| = \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial r}\right| = |(\sin\theta\cos\phi)\ \hat{x} + (\sin\theta\sin\phi)\ \hat{y} + (\cos\theta)\ \hat{x}| = 1$$

Para h_2, se obtiene

$$h_2 = \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2}\right| = \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta}\right| = |(r\cos\theta\cos\phi)\ \hat{x} + (r\cos\theta\sin\phi)\ \hat{y} + (-r\sin\theta)\ \hat{x}| = r,$$

y el tercer factor de escala resulta

$$h_3 = \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_3}\right| = \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi}\right| = |(-r\sin\theta\sin\phi)\ \hat{x} + (r\sin\theta\cos\phi)\ \hat{y} + 0\,\hat{x}| = r\ \sin\theta.$$

Usando estos tres factores de forma en las 4 primeras expresiones generales es posible obtener la determinación de cualquier operador diferencial en coordenadas esféricas.

3. Sí, es útil pero ... cómo se derivaron esas expresiones?

Comentemos brevemente cómo se derivan las expresiones generales para los operadores en coordenadas curvilíneas ortogonales. Para eso, comencemos por considerar cómo se escriben las componentes de un vector cualquiera en dichas coordenadas.

Consideremos el vector $\vec{A}$, cuyas componentes en un sistema cartesiano ortogonal se escriben en términos de los versores $\hat{x}, \hat{y}$ y $\hat{z}$. Ese mismo vector, escrito en coordenadas curvilíneas ortogonales tendrá distintas componentes, y estará escrito en término de los versores $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ y $\hat{e}_3$. Deberá valer

$$\vec{A} = a_1\,\hat{x} + a_2\,\hat{y} + a_3\,\hat{z} = a_1'\,\hat{e}_1 + a_2'\,\hat{e}_2 + a_3'\,\hat{e}_3.$$

Si ahora usamos las expresiones con las que contamos para escribir los versores curvilíneos en términos de los versores cartesianos, tenemos

$$a_1 = a_1' h_1 \partial_x \xi_1 + a_2' h_2 \partial_x \xi_2 + a_3' h_3 \partial_x \xi_3, \tag{14}$$

$$a_2 = a_1' h_1 \partial_y \xi_1 + a_2' h_2 \partial_y \xi_2 + a_3' h_3 \partial_y \xi_3, \tag{15}$$

$$a_3 = a_1' h_1 \partial_z \xi_1 + a_2' h_2 \partial_z \xi_2 + a_3' h_3 \partial_z \xi_3. \tag{16}$$

Este es un sistema lineal de 3×3 cuya inversión permite calcular las a_i' (desconocidas) en función de las a_i. Notemos que invertir el problema no es tan complejo como puede parecer. En principio, observamos que la derivada de una cualquiera de las funciones ξ_i respecto de cualquier otra, digamos, ξ_j, debe ser nula excepto cuando $i = j$, es decir

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_j} = \delta_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \xi_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \xi_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi_j}.$$

3.1. Forma general del gradiente en coordenadas curvilíneas

Según sabemos, en coordenadas cartesianas tenemos

$$\nabla\phi = \partial_x\phi\,\hat{x} + \partial_y\phi\,\hat{y} + \partial_z\phi\,\hat{z}.$$

Aplicando las reglas de derivación usuales, resulta

$$\partial_x\phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\phi}{\partial\xi_i}\frac{\partial\xi_i}{\partial x}, \tag{17}$$

$$\partial_y\phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\phi}{\partial\xi_i}\frac{\partial\xi_i}{\partial y}, \tag{18}$$

$$\partial_z\phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\phi}{\partial\xi_i}\frac{\partial\xi_i}{\partial z}. \tag{19}$$

Luego podemos escribir el gradiente como

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}\left(\partial_x \xi_1\, \hat{x} + \partial_y \xi_1\, \hat{y} + \partial_z \xi_1\, \hat{z}\right) + \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2}\left(\partial_x \xi_2\, \hat{x} + \partial_y \xi_2\, \hat{y} + \partial_z \xi_2\, \hat{z}\right) + \frac{\partial \phi}{\partial \xi_3}\left(\partial_x \xi_3\, \hat{x} + \partial_y \xi_3\, \hat{y} + \partial_z \xi_3\, \hat{z}\right) =$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}\vec{\nabla}\xi_1 + \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2}\vec{\nabla}\xi_2 + \frac{\partial \phi}{\partial \xi_3}\vec{\nabla}\xi_3.$$

Ahora teniendo en cuenta las definiciones de los gradientes de ξ_i, podemos reescribir

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}\,\hat{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \phi}{\partial \xi_2}\,\hat{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \phi}{\partial \xi_3}\,\hat{e}_3,$$

que constituye la expresion del gradiente en el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales de componentes ξ_1, ξ_2 y ξ_3 y cuyos versores fundamentales son $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ y $\hat{e}_3$.

De manera análoga, aunque con un poco más de esfuerzo, pueden calcularse los demás operadores diferenciales fundamentales, tales como la divergencia, el rotor y el laplaciano. Esto último sólo en el caso en que se necesite demostrar las primeras 4 expresiones generales de este apunte. Para casos prácticos en los que sólo queremos poder escribir un operador dado en un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal usual, basta con recordar esas 4 expresiones (que tienen alta simetría) y tener en mente también los factores de escala de cada sistema de coordenadas. Aquí debajo dejamos un cuadro con los más usados en el curso.

	h_1	h_2	h_3
Cartesianas (x, y, z)	1	1	1
Cilíndricas (r, θ, z)	1	r	1
Esféricas (r, θ, ϕ)	1	r	$r \sin\theta$

Cuadro 1: Factores de escala h_1, h_2, h_3 en coordenadas ortogonales

Recordemos, por completitud, las definiciones de estas magnitudes en cilíndricas y esféricas.

En coordenadas cilíndricas (r, θ, z), θ es el ángulo azimutal, que se mide en el plano xy desde el eje x positivo en sentido antihorario. Su rango típico es $0 \leq \theta < 2\pi$.

En coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), θ es el ángulo polar o colatitud. Se mide desde el eje z positivo hacia abajo, y su rango típico es $0 \leq \theta \leq \pi$. Notar que ϕ (y no θ) es el ángulo azimutal en esféricas, equivalente al θ de cilíndricas.