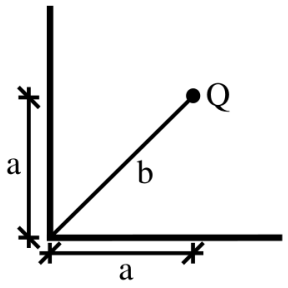
Práctica 3: Flujos ideales incompresibles

Problema 1. Flujos singulares Los siguientes fluidos incompresibles e ideales fluyen de tal manera que su movimiento puede ser considerado bidimensional (2D), es decir, que existe simetría de traslación en una dirección que asociaremos con el eje z.
(i) Una corriente uniforme al infinito con módulo U_∞ que forma un ángulo α con el eje x.
(ii) Una distribución lineal de fuentes o sumideros de caudal $\pm Q$ respectivamente.
(iii) Un vórtice de circulación Γ.
(iv) Un dipolo formado por una fuente y un sumidero de idéntico caudal (en módulo).
(v) Un dipolo formado por dos vórtices de circulación Γ iguales en módulo y opuestos en sentido.
Para cada flujo determine:
(a) el campo de velocidades $\mathbf{v}(x, y)$,
(b) el rotor $\boldsymbol{\omega}(x, y) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}$,
(c) la función de corriente $\psi(x, y)$ y el gráfico de las líneas de corriente,
(d) el potencial complejo $W(z)$ donde $z = x + iy$.

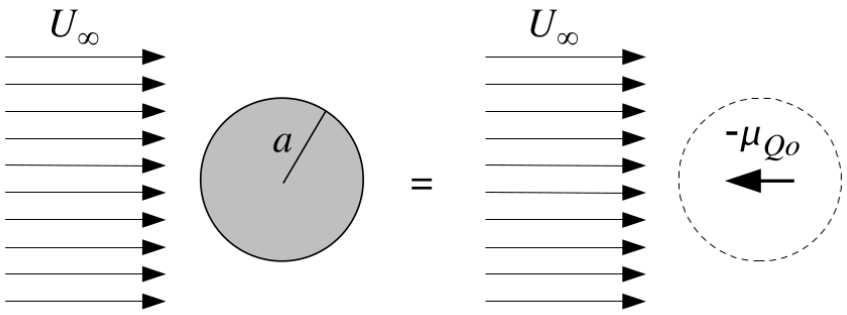
Problema 2. Flujos producidos en presencia de contornos sólidos Para las siguientes configuraciones de fluidos incompresibles e irrotacionales, calcule el potencial complejo, el campo de velocidades y los puntos de estancamiento. Grafique cualitativamente las líneas de corriente.
(i) Una fuente (sumidero) de caudal Q $(-Q)$ ubicada a una distancia d de un plano infinito.
(ii) Idem (i) pero a una distancia $2d$ de la intersección de dos planos semi-infinitos que forman un ángulo $\pi/2$ entre ellos.
(iii) Idem (i) entre dos planos infinitos paralelos a la misma distancia d de cada uno de ellos.
(iv) Un vórtice de circulación $\Gamma > 0$ a distancia d de un plano infinito.
(v) Idem (ii) pero con un vórtice de circulación $\Gamma > 0$.
(vi) Un dipolo de intensidad μ_{Q0} y ángulo α respecto al eje real (x) a distancia d de un plano infinito. Considere luego en particular el caso $\alpha = \pi$ (el dipolo apuntando hacia el plano).

Problema 3 La figura muestra un fluido ideal, incompresible e irrotacional que llena completamente el interior de un codo con ángulo recto. A una distancia $b = \sqrt{2}a$ del codo se encuentra una fuente de caudal Q.



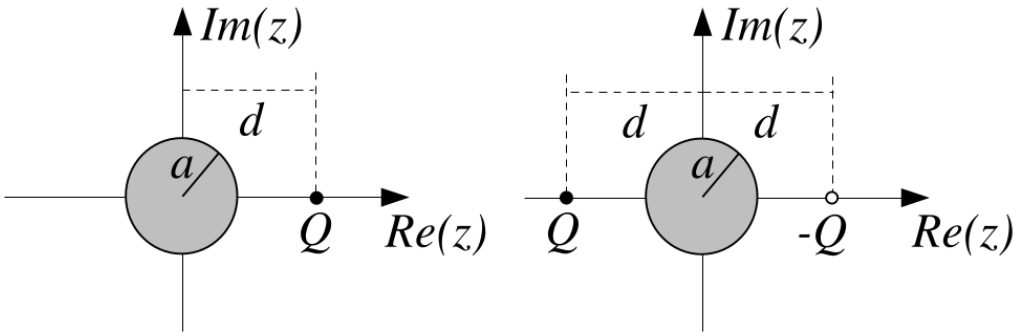
(i) Determine las imágenes necesarias para resolver el potencial de esta configuración.
(ii) Escriba el potencial complejo para la configuración.
(iii) Dibuje cualitativamente las líneas de corriente.
(iv) Calcule los puntos de estancamiento.

Problema 4. Flujo alrededor de un cilindro La superposición del flujo producido por un dipolo de intensidad μ_{Q0} enfrentado a un flujo uniforme (ρ_0, p_0) al infinito de velocidad U_∞, genera un flujo que corresponde exactamente al flujo ideal externo de una corriente uniforme al infinito en presencia de un cilindro sólido.
(i) Calcule el potencial complejo de la configuración.
(ii) Aplicando el teorema del círculo al problema del flujo uniforme frente al cilindro de radio a, encuentre cuál debe ser el módulo de la intensidad del dipolo imagen y su dirección para que el contorno del cilindro, $|z| = a$, sea una línea de corriente.
(iii) ¿Dónde se encuentran los puntos de estancamiento?
(iv) Encuentre una expresión para la presión sobre el cilindro como función del ángulo.



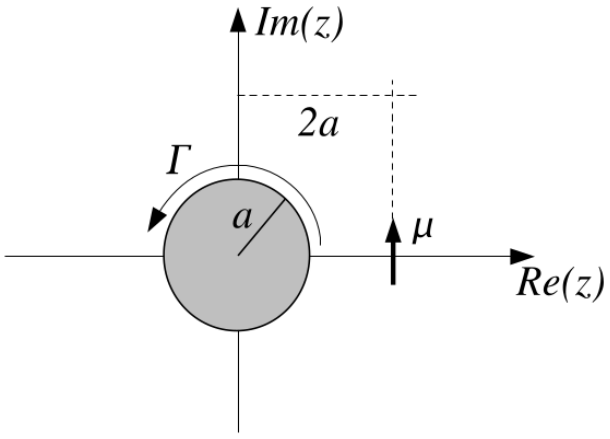
(v) ¿Cuál es la fuerza que el fluido ejerce sobre el cilindro?

Problema 5. Para las configuraciones de sólidos y singularidades con simetría de traslación en fluidos ideales, incompresibles e irrotacionales que se muestran en las figuras:

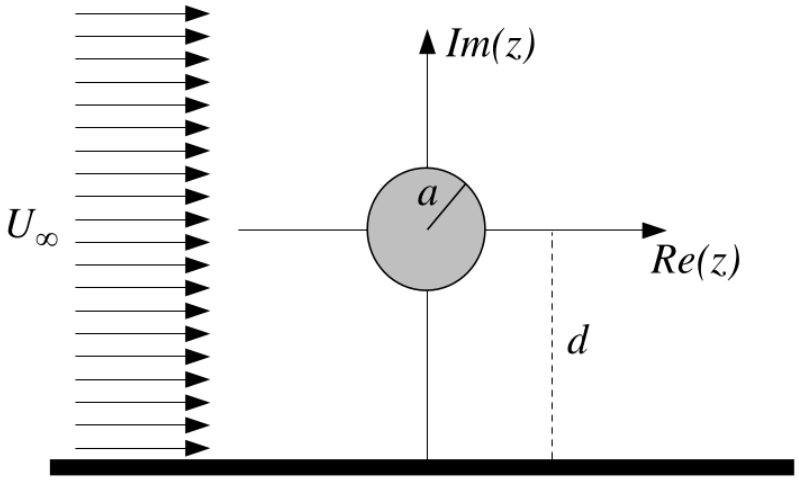


(i) Haga un diagrama cualitativo de la líneas de corriente.
(ii) Escriba el potencial complejo.
(iii) Halle los puntos de estancamiento.
(iv) Grafique la presión como función de la posición, para puntos del contorno sólido.
(v) Calcule la fuerza total sobre el contorno sólido.

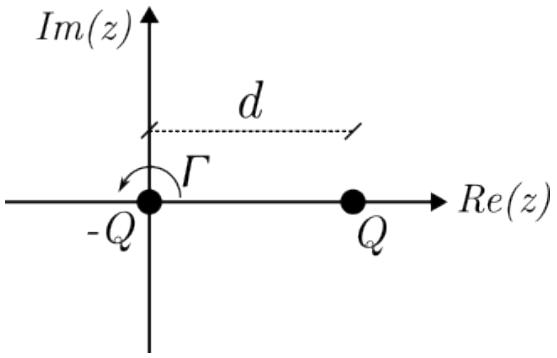
Problema 6. Se tiene un cilindro infinito de radio a con circulación atrapada Γ, inmerso en un fluido incompresible e irrotacional de densidad ρ. A una distancia $2a$ se encuentra un dipolo de intensidad μ_0 , orientado según se muestra en la figura. Halle el valor de μ_0 para que la fuerza sobre el cilindro sea nula.



Problema 7. Calcule la fuerza que sufre el cilindro para la configuración de la figura. Para ello, elija la aproximación a orden más bajo en el potencial complejo que de una fuerza sobre el cilindro no nula. ¿Dónde están los puntos de estancamiento?



Problema 8. "Estrella binaria" Un sistema binario dado por una estrella y un agujero negro (vea Cygnus X-1) puede modelarse cómo un sistema fuente-sumidero con rotación cómo muestra la figura.



(i) Determine el punto de estancamiento y el comportamiento del campo para $r = |z| \to \infty$.
(ii) Haga un diagrama cualitativo de la líneas de corriente. Considere los casos $\Gamma \ll Q$ y $\Gamma \gg Q$.
(iii) Para $\Gamma = 0$, determine el tiempo mínimo que un elemento de fluido que emerge en $(d, 0)$ tarda en llegar al origen. ¿Que ocurre para este tiempo cuando $\Gamma > 0$?
(iv) Cómo el único potencial del sistema es gravitatorio, tenemos un potencial por unidad de masa

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{|\mathbf{r}|} - \frac{Gm}{|\mathbf{r} - d\hat{\mathbf{x}}|}$$

donde M y m son las masas del agujero negro y de la estrella, respectivamente. Usando el principio de Bernoulli, determine la presión $p(z)$ en todo el espacio.
Aclaración: Este modelo no es realista, solo cualitativamente ilustrativo.