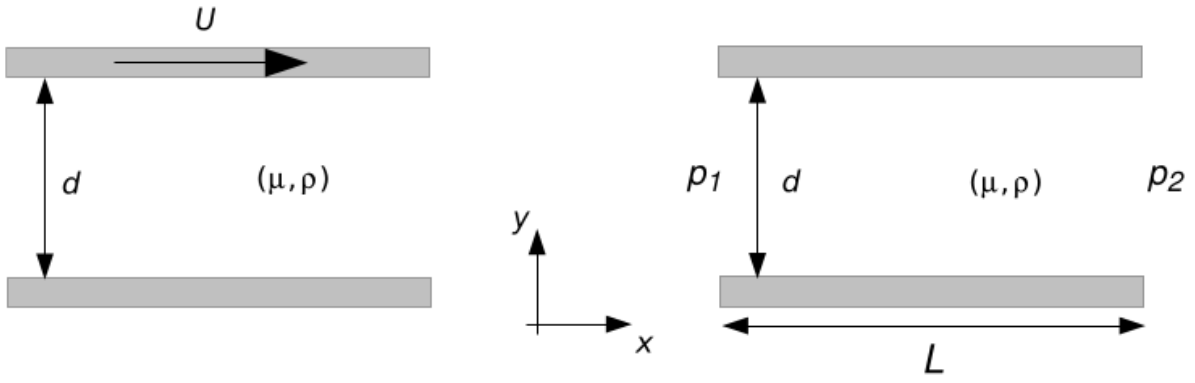
# Práctica 4: Flujos viscosos

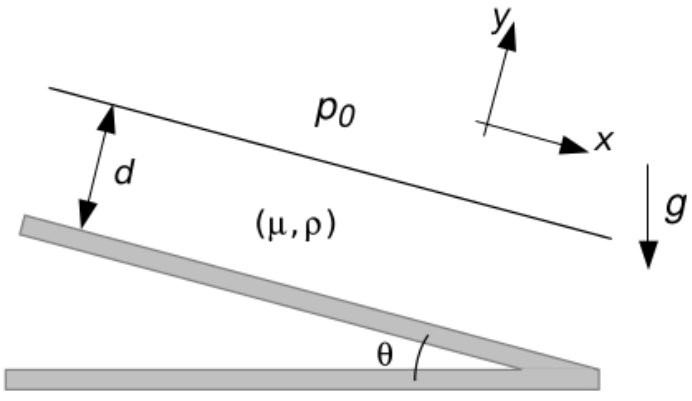
**Problema 1.** Considere el caso del flujo estacionario de un fluido viscoso con viscosidad dinámica $\mu$ y densidad $\rho$ constantes, cuyo campo de velocidades $\vec{v}$ es solamente función de la coordenada transversal al movimiento

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = v_x(y)\hat{\mathbf{x}} \ .$$

El flujo tiene simetría de traslación en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$.
(i) Demuestre que en estas condiciones $(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = 0$.
(ii) Encuentre el campo de velocidades cuando el fluido satisface las siguientes condiciones de contorno:
(a) El movimiento del fluido está limitado por dos planos infinitos separados una distancia $d$. El plano inferior está en reposo y el superior se desplaza en la dirección $x$ con velocidad $U$ constante.
(b) Idem (a) pero ahora el movimiento se establece por un gradiente de presión constante igual a $\Delta p/L = (p_2 - p_1)/L$, donde $L$ es una distancia característica de variación de la presión, y las presiones $p_1$ y $p_2$ son medidas como se indica en la figura.
(iii) Para ambos casos, calcule el esfuerzo viscoso sobre el contorno sólido.




**Problema 2.** Una capa de líquido muy viscoso fluye bajo la acción de la gravedad sobre un plano inclinado que forma un ángulo $\theta$ con la horizontal.
(i) Suponiendo que el espesor de la capa de fluido $d$ es uniforme, y que el flujo es estacionario, halle la velocidad del líquido en función de la distancia normal al plano $y$.
(ii) Determine la relación entre la velocidad promedio y la velocidad máxima en el fluido.
(iii) Calcule el caudal másico por unidad de ancho del plano.



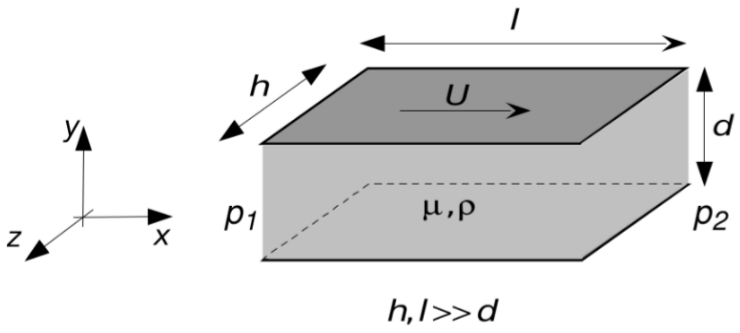
**Problema 3.** Resuelva nuevamente el problema 2.(i), pero ahora considerando dos fluidos con densidades $\rho_1$ y $\rho_2$ y viscosidades dinámicas $\mu_1$ y $\mu_2$ respectivamente, que se encuentran uno encima del otro, con espesores $h_1$ y $h_2$.

**Problema 4.** Un fluido se desplaza en el interior de un conducto cilíndrico de radio $a$, siendo su movimiento establecido por un gradiente de presiones constante igual a $\Delta p/L$, donde $L$ es la longitud del cilindro.
(i) Calcule el campo de velocidades considerando que el mismo es solo función de la coordenada transversal al movimiento.
(ii) Calcule el esfuerzo viscoso sobre el contorno sólido.

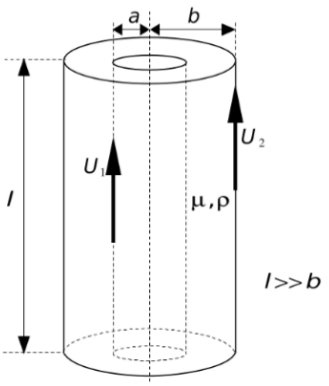
**Problema 5.** Mediante análisis dimensional, muestre que la cantidad de masa de fluido que pasa por unidad de tiempo (el caudal $Q$, también llamado "descarga") a través de un conducto de sección circular como en el flujo de Poiseuille, depende de la potencia cuarta del radio del conducto. Además, vea que es proporcional al gradiente de presiones entre los extremos del tubo e inversamente proporcional a la viscosidad cinemática.

**Problema 6.** Para las configuraciones de líquidos con viscosidad dinámica $\mu$ y densidad $\rho$ que se listan en (i)-(iv):
(i) Encuentre una solución laminar y estacionaria para el campo de velocidades.
(ii) Realice el análisis dimensional de la magnitud que se indica, y compruébelo luego por cálculo analítico.

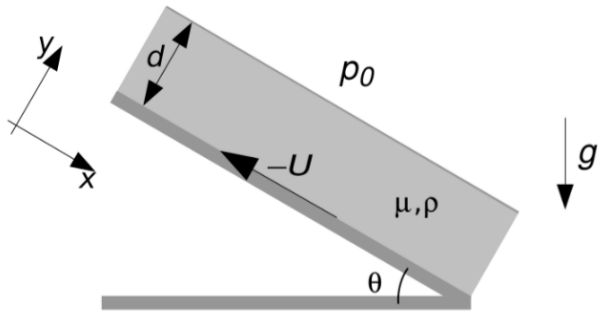
i. $y_0$: ubicación del punto de velocidad máxima.



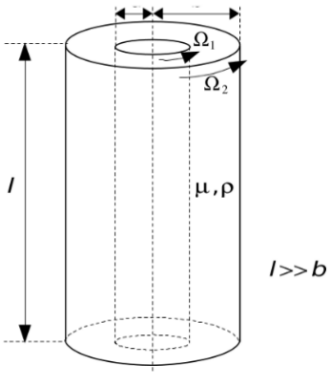

iii. $Q$: caudal.




ii. $\sigma$: fuerza que realiza el plano por unidad de superficie.




iv. $N_{1,2}$: cupla que realiza cada cilindro.



**Problema 7.** Considere el movimiento estacionario de una esfera sólida de masa $m$ y diámetro $D$ en el seno de un líquido viscoso en reposo, con viscosidad dinámica $\mu$ y densidad $\rho$. La esfera se mueve con velocidad constante $-U\hat{x}$, y para que el movimiento pueda ser considerado estacionario debe describirse desde un sistema inercial fijo a la esfera. Desde el mismo, el fluido se desplaza lejos de la esfera con velocidad $U$. Se quiere analizar la fuerza de arrastre que el fluido ejerce sobre la esfera.
(i) Estime mediante análisis dimensional la forma funcional de esta fuerza, en los casos de velocidades muy bajas y muy altas, es decir, cuando el número de Reynolds $Re = UL/\nu$ es muy pequeño ($Re \ll 1$), y cuando el número de Reynolds es muy grande ($Re \gg 1$). Aquí $L$ es alguna escala característica del problema, y $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática.
(ii) Con el resultado de (i), encuentre las expresiones correspondientes a la velocidad límite que alcanza la esfera cayendo bajo la acción de la gravedad en el seno del fluido. Observe que la fuerza obtenida en (i) no depende solamente del número de Reynolds, ya que la gravedad es importante en este caso. El otro número adimensional que interviene en la fuerza es el número de Froude

$$F = \frac{U^2}{Lg} \quad ,$$

donde $g$ es la aceleración de la gravedad.
(iii) Considere ahora el flujo no estacionario, donde además de los parámetros y variables del inciso (i), interviene un tiempo característico $\tau$ que determina la tasa de variación del flujo (por ejemplo, el período de una oscilación que realiza el cuerpo). Vea entonces que las dos cantidades adimensionales que pueden formarse son el número de Reynolds y el de Strouhal

$$S = \frac{U\tau}{L} \quad .$$

**Problema 8.** Considere un fluido inicialmente en reposo que llena el semiespacio $y > 0$, con viscosidad dinámica $\mu$ y densidad $\rho$ uniforme. En $y = 0$, el fluido está en contacto con un plano infinito. A $t = 0$ el plano es puesto súbitamente en movimiento con velocidad constante $U\hat{x}$. Asumiendo que el campo de velocidades es solo función del tiempo y de la coordenada vertical $y$:
(i) Realice el análisis dimensional y encuentre una solución autosimilar para el campo de velocidades como función del tiempo.
(ii) Realice un gráfico cualitativo del campo de velocidades para tiempos próximos al momento posterior del arranque, y otro para tiempos largos.
(iii) Calcule la vorticidad.
(iv) El arranque inmediato del plano genera una lámina de vorticidad infinita en $y = 0$, que difunde en el tiempo por acción de la viscosidad hacia el interior del fluido. Estime el tiempo que le toma a la vorticidad difundir una distancia $L$.

**Problema 9.** A $t = 0$, se genera un vórtice de circulación $\Gamma_0$ en el seno de un fluido con viscosidad dinámica $\mu$ y densidad $\rho$. Aparece entonces un campo de velocidades azimultal y que sólo depende de la coordenada radial. Debido a la viscosidad, el fluido no puede mantener en el tiempo este flujo y como en el problema anterior se produce una difusión de la vorticidad.
(i) Estudie este proceso para $t > 0$ en términos de la circulación $\Gamma(r, t) = 2\pi r v_\theta(r, t)$ como variable dependiente del problema. Haga análisis dimensional para poner de manifiesto el tipo de solución autosemejante.
(ii) Obtenga el campo de velocidades. Vea que para distancias $r$ desde el eje que satisfacen $r \ll \sqrt{4\nu t}$, el

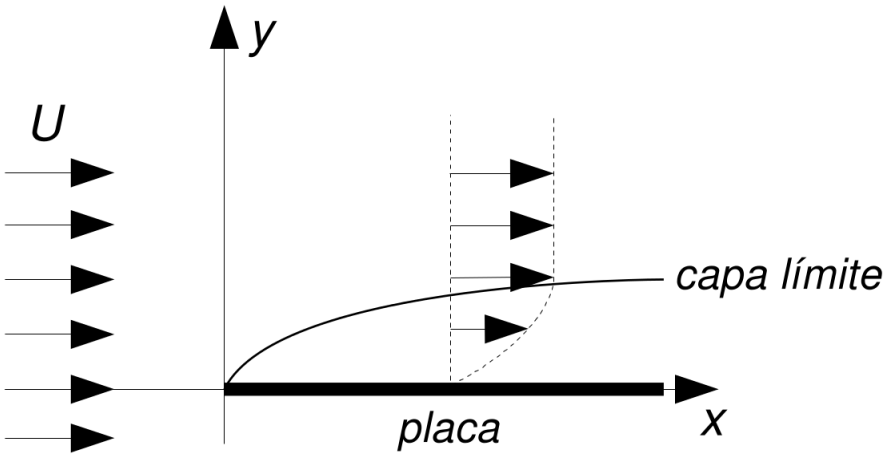
flujo no es más irrotacional, sino que viene dado aproximadamente por

$$v_\theta = \frac{\Gamma_0 r}{8\pi\nu t} \quad ,$$

que corresponde a un movimiento de rotación con velocidad angular

$$\Omega = \frac{\Gamma_0}{8\pi\nu t} \quad .$$

**Problema 10.*** Considere una placa plana semi-infinita en el plano $xz$, con su borde en $x = 0$ como se muestra en la figura. Un flujo estacionario e uniforme con velocidad $U\hat{x}$ incide sobre el borde de la placa. Lejos del borde la presión es uniforme y toma valor $p_0$.




(i) Muestre que las ecuaciones de la capa límite se reducen en este caso a

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad , \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad ,$$

y escriba las condiciones de contorno para $v_x$ y $v_y$.
(ii) A partir de análisis dimensional, muestre que la función corriente (tal que $\vec{v} = \nabla\psi \times \hat{z}$) debe ser de la forma

$$\psi(x, y) = \sqrt{U\nu x} f(u) \quad , \quad u = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad .$$

(iii) Usando la expresión de $\psi$, halle expresiones para $v_x$ y $v_y$ en términos de $U$, $\nu$, $x$, $u$, y de la función $f$ y sus derivadas.
(iv) Reemplazando las expresiones de $v_x$ y $v_y$ en las ecuaciones de la capa límite, muestre que $f$ satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$f\, f'' + 2f''' = 0 \quad ,$$

con condiciones de contorno $f(0) = f'(0) = 0$ y $f'(\infty) = 1$.
(v) Note que las curvas de nivel de $v_x$ corresponden a $u =$ constante. Muestre entonces que el ancho de la capa límite crece como $x^{1/2}$.

**Problema 11.*** Utilizando análisis dimensional, muestre que el ancho de la capa límite en un fluido viscoso en contacto con una placa infinita que gira con velocidad angular $\Omega$, es proporcional a $\sqrt{\nu/\Omega}$.