ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4 - PRIMER CUATRIMESTRE DE 2025

MINI INTRODUCCIÓN/REPASO DE SIMETRÍAS, GRUPOS, ÁLGEBRAS Y REPRESENTACIONES

# Simetrías. Grupos discretos y continuos

Las simetrías en física son un aspecto fundamental de muchos sistemas y, al mismo tiempo, una herramienta de cálculo extremadamente útil. Matemáticamente, están codificadas en la estructura de **Grupo**. Un grupo $G$ es un conjunto de elementos con las siguientes propiedades:

- **Producto:** Si $g_1, g_2 \in G$ entonces existe una operación " $\cdot$ " tal que $g_1 \cdot g_2 \in G$.
- **Asociatividad:** Si $g_1, g_2, g_3 \in G$ entonces $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$.
- **Identidad:** Existe un único elemento $e \in G$ tal que $e \cdot g = g \cdot e \; \forall g \in G$.
- **Inverso:** Si $g \in G$ entonces existe un único elemento $g^{-1} \in G$ tal que $g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e$.

Esto condensa todo lo que esperamos de transformaciones de simetría típicas como las rotaciones: que se puedan componer, que sean reversibles, etc. Notar que el "producto"puede corresponder a distintos tipos de operaciones, no necesariamente un producto numérico o matricial. Por ejemplo, los números números enteros $\mathbb{Z}$ conforman un grupo donde el "producto" es la suma usual.

Algunas simetrías que nos interesan están asociadas a **grupos discretos** y tienen una cantidad finita de elementos, como por ejemplo el de la transformación de paridad [$P : (x, y, z) \to (-x, -y, -z)$], el de la inversión temporal [$T : t \to -t$], y el de la conjugación de carga [$C : e \to -e$, donde $e$ es, por ejemplo, la carga del electrón]. También podríamos tener el grupo de permutaciones de $n$ elementos, que puede aparecer en un sistema de $n$ espines con condiciones periódicas de contorno, o el grupo de rotaciones que dejan invariante un cuadrado. *Van algunos ejercicios al respecto:*

1. Explique, en qué sentido, los grupos asociados a las operaciones $P$, $T$ y $C$ (considerados de manera aislada) pueden identificarse con el grupo $\mathbb{Z}_2$, con el "producto"dado por la suma módulo 2. Esto es, el residuo que se obtiene luego de dividir por 2 la suma de dos números.

2. Construya la *tabla de multiplicar* de $S_n$, el grupo de permutaciones de $n = 3$ elementos.

3. Verifique que la tabla de multiplicar

| $\cdot$ | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | a | b | c | d |
| b | b | c | d | a |
| c | c | d | a | b |
| d | d | a | b | c |

cumple los axiomas de grupo, y que dicho grupo describe las rotaciones que dejan invariante a un cuadrado.

Otras simetrías corresponden a **grupos continuos**, y más precisamente a un tipo muy especial de grupos continuos conocidos como *grupos de Lie*. Es el caso de las rotaciones en el espacio de tres dimensiones, las transformaciones de spin, las simetrías (aproximadas) de isospin que nos interesan en esta materia, y también a las simetrías de Lorentz, entre muchas otras. Estos ejemplos en particular pueden entenderse en términos de los grupos SO(3), SU(2), SU(3) y SO(1,3). Estos son grupos matriciales, donde el producto es el producto matricial usual, y las letras O, U y S indican que tratamos con matrices ortogonales, unitarias o de determinante unitario, respectivamente, mientras que los números hablan del rango de esas matrices cuadradas. Por ejemplo U($n$) es el grupo de matrices unitarias de $n \times n$.

4. En esta notación, ¿qué grupos corresponden a las rotaciones espaciales en una, dos y tres dimensiones?
5. Muestre que los grupo U(1) y SO(2) son *isomorfos*, es decir que existe una relación uno a uno entre sus elementos. ¿Vale lo mismo para SU(2) y SO(3)?
6. Muestre que los grupos U(n) y SU(n) tienen dimensión $n^2$ y $n^2 - 1$, respectivamente, donde la dimensión se define como la cantidad de parámetros **reales** que se necesitan para especificar un elemento del grupo.

A partir de ahora, nos concentramos en el ejemplo relevante para la materia: el del grupo de Lie SU(2).

## El grupo SU(2) y su álgebra de Lie

Pensemos en el caso de SU(2). Lo definimos en términos de las matrices unitarias de $2 \times 2$ a coeficientes complejos. Una matriz $U$ es unitaria si $U^\dagger = U^{-1}$. Dado que si $ad - bc = 1$ tenemos

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad g^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}, \qquad g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \tag{1}$$

necesitamos imponer las condiciones $d = \bar{a}$ y $c = -\bar{b}$. Sumado a la(s) del determinante, obtenemos 5 condiciones reales sobre un total de 4 números complejos complejos, es decir que quedan 3 grados de libertad reales, que es la *dimensión* de SU(2). En otras palabras,

$$\mathrm{SU}(2) = \{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \}. \tag{2}$$

Cada valor distinto de $\alpha$ y $\beta$ que satisfaga estas condiciones es un elemento $g(\alpha, \beta)$ del grupo SU(2). Si definimos $\alpha = x_0 + ix_3$ y $\beta = x_2 + ix_1$ tenemos que

$$g(\alpha, \beta) = x_0 1 + x_i \sigma_i , \tag{3}$$

donde $\sigma_i$ son las matrices de Pauli. En estas coordenadas la condición $\det g = 1$ se lee $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, lo que nos permite identificar a cada elemento del grupo con un punto en la esfera $S^3$. Esto es una propiedad genérica de los grupos de Lie: todos pueden ser identificados con lo que se conoce como una *variedad diferenciable* (en pocas palabras, una hyper-superficie suave).

En ciertas situaciones resulta más práctico trabajar con el **álgebra de Lie** de un dado grupo de Lie, denominada $\mathfrak{g}$, es decir, lo que en física llamamos los *generadores*. Dado un grupo $G$, podemos definir a $\mathfrak{g}$ como un espacio vectorial equipado con un corchete de Lie tal que los elementos de (la componente conexa con la identidad del grupo) $G$ pueden obtenerse *exponenciando* elementos de $\mathfrak{g}$. Un corchete de Lie es una operación bi-lineal, antisimétrica y que satisface la identidad de Jacobi tal que para cualquier par de elementos $T_a, T_b \in \mathfrak{g}$, su corchete $[T_a, T_b]$ también está en $\mathfrak{g}$. En el caso de los grupos matriciales, como SU(2), el corchete de Lie es simplemente el conmutador de matrices, y la operación exponencial es simplemente

$$e^A = 1 + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \cdots . \tag{4}$$

Utilizando la propiedad de que para matrices cuadradas

$$e^{\mathrm{Tr}[A]} = \det\left(e^{A}\right) , \tag{5}$$

Es fácil convencerse de que el álgebra de Lie de SU(2), que denotaremos $\mathfrak{su}(2)$, viene dado por el espacio vectorial de las matrices de $2\times 2$ a coeficientes complejos hermíticas y de traza nula, es decir, el que está generado por las matrices de Pauli. En efecto, si $\vec{a} = a_1, a_2, a_3$ y $a = \vec{a}$, exponenciando un elemento genérico de $\mathfrak{su}(2)$ obtenemos

$$\exp\left(i\vec{a}\cdot\vec{\sigma}\right) = 1\cos a + i\sin a\,\hat{a}\cdot\vec{\sigma}\,, \tag{6}$$

y vemos que, eligiendo los valores de $\vec{a}$ y exponenciando podemos obtener cualquier elemento de SU(2).

7. Demuestre la propiedad (5) para matrices diagonalizables.
8. Muestre que si los elementos de un álgebra de Lie conmutan todos entre sí, el grupo de Lie correspondiente resulta ser abeliano. (Pista: ¿le suenan las siglas BCH?)
9. Encuentre las condiciones que se deben cumplir para que una matriz pertenezca al álgebra de Lie de SU($n$). Muestre que si dos matrices cumplen estas condiciones, su conmutador también debe cumplirlas.

## Algunas representaciones de SU(2)

Un concepto muy importante es el de las distintas **representaciones de un dado grupo**. Dicho mal y pronto, una representación $r$ de un grupo $G$ dada por un par $(V_r, \rho_r)$ consiste en un espacio vectorial $V_r$ sobre el cual $G$ actúa *linealmente*, en el sentido de que $\rho_r$ es un mapa que asigna a cada elemento $g \in G$ una transformación lineal $\rho_r(g) : V_r \to V_r$. En el caso finito, $V_r$ tiene dimensión $n_r$, y podemos *representar* la acción de cada $g$ como una matriz de $n_r \times n_r$. Obviamente, el mapa $\rho_r$ tiene que respetar la estructura del grupo, por lo que debe cumplir que $\rho_r(g_1 \cdot g_2) = \rho_r(g_1)\rho_r(g_2)$, $\rho_r(e) = 1_{n_r\times n_r}$. En particular esto implica que $\rho_r(g^{-1}) = \rho_r(g)^{-1}$, por lo que estamos tratando con matrices invertibles.

Dado un grupo pueden existir muchas representaciones distintas, asociadas por ejemplo a distintos tipos de sistemas que tienen la misma simetría. Esto ya lo sabemos de la mecánica cuántica: el grupo SU(2) puede usarse para describir las transformaciones en el spin de los electrones, que tienen spin $1/2$, pero también para las que corresponden a partículas spin 1, $3/2$, etc. Veamos algunos ejemplos.

En el caso de la representación de spin $1/2$, $V_{1/2}$ un espacio vectorial de dimensión 2. Esto coincide con el tamaño de las matrices que usamos inicialmente para describir a SU(2), y se conoce como representación fundamental. Una base posible sería

$$\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} , \tag{7}$$

e identificamos a los generadores, que llamaremos genéricamente $S_x$, $S_y$ y $S_z$, con las matrices de Pauli (divididas por 2 por convención):

$$S_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad S_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \qquad S_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{8}$$

La manera en que actúan estos generadores es simplemente mediante la multiplicación usual de matrices y vectores. Muchas veces, además, usamos los operadores de subida y bajada $S_\pm = S_x \pm iS_y$.

Para spin 1, la representación se basa en un espacio vectorial de dimensión 3, con base $\{|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$. En esta base, las matrices que reprentan la acción son distintas:

$$S_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

El grupo no cambió, pero sí cambió la manera de representarlo y el espacio vectorial sobre el que actúa. Cabe aclarar que para SU(2) la representación de spin 1 tiene además la propiedad de que su dimensión coincide con la del álgebra de Lie: ambos son espacios vectoriales de dimensión 3. Esto es porque la representación de spin 1 coincide con lo que se conoce como la representación adjunta, donde es espacio vectorial $V_{\text{adj}}$ está dada por el álgebra misma, y los generadores actúan no por multiplicación matricial, sino a través de la operación definida por el corchete de Lie (el conmutador).

Para terminar, introducimos un último ejemplo que será útil más adelante en el curso. Las representaciones que planteamos hasta ahora era irreducibles. Sin embargo, nada nos impide armar nuevas representaciones combinando las que ya conocemos. Por ejemplo, podemos armar la representación de Dirac (trabajando sólo con el spin e ignorando todo lo relativo a transformaciones de Lorentz) usando la suma directa:

$$V_{\text{Dirac}} = V_{1/2} \oplus V_{1/2}. \tag{10}$$

En esta representación de dimensión 4 podemos elegir una base

$$\{|\uparrow\rangle_1, |\downarrow\rangle_1, |\uparrow\rangle_2, |\downarrow\rangle_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \tag{11}$$

los generadores toman la una forma factorizada en bloques:

$$S_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix}, \qquad S_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix}, \qquad S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix}, \tag{12}$$

donde los "0" , son matrices nulas de $2 \times 2$. Notar que todas las matrices que usamos en las distintas representaciones cumplen las relaciones de conmutación que definen el álgebra de $\mathfrak{su}(2)$:

$$[S_i, S_j] = i\varepsilon_{ijk} S_k. \tag{13}$$

## Teoría de representaciones de $\mathfrak{su}(2)$

En general, tendremos una representación de SU(2) para de este tipo para cualquier spin $j$ (entero o semi-entero), cuya dimensión será $2j+1$. Podemos verlo rápidamente de una manera sistemática si clasificamos todas las representaciones irreducibles, en el sentido de que no se pueden separar en representaciones más chicas independientes entre sí. Una propiedad importante es que, para grupos simplemente conexos como SU(2), todas las representaciones del grupo inducen a su vez una representación del álgebra, y vice-versa. Las cuentas son más simples si trabajamos con transformaciones infinitesimales, es decir, directamente con $\mathfrak{su}(2)$. Para que los resultados sean generales, necesitamos usar solamente los conmutadores que definen este álgebra, en vez de referirnos a una forma matricial en particular. En el caso de $\mathfrak{su}(2)$, y utilizando los operadores de subida y bajada $\sqrt{2}s_\pm = s_x \pm i s_y$, tenemos

$$[s_z, s_\pm] = \pm s_\pm \qquad [s_+, s_-] = s_z. \tag{14}$$

Por otro lado, el Casimir

$$s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = s_z^2 + s_z + s_+ s_- \tag{15}$$

satisface $[s_i, s^2] = 0$ es decir que podemos elegir un autoestado y usar el correspondiente autovalor $j(j+1)$ para definir a cada una de las representaciones. Por otro lado, la proyección, es decir el autovalor de $s_z$, que llamamos $m$, etiquetará a cada estado en una dada representación, e iremos moviéndonos dentro de la misma usando los operadores de subida y bajada.

Pidiendo que los estados tengan norma no negativa (unitariedad), puede verse fácilmente que

- $j$ tiene que ser no negativo, y a la vez entero o semi-entero, o sea que sólo podemos tener representaciones con $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$,
- en una representación de spin $j$, hay $2j+1$ estados, para los que $m$ toma valores $m = -j, -j+1, \ldots, j-2, j-1, j$.

Todo esto se estudia en Física Teórica 2, pero es útil recordarlo, e importante resaltar que estas son *todas* las representaciones irreducibles de $\mathfrak{su}(2)$, obviamente a menos de isomorfismos. Además, están las representaciones reducibles, como la de Dirac, que se construyen simplemente combinando las irreducibles por medio de sumas directas.

10. Demuestre de que manera imponer que los estados tengan norma no negativa establece los valores posibles de los números cuánticos $j$ y $m$. Pista: recuerde las propiedades de hermiticidad de los generadores $s_i$, y use que $2(s^2 - s_z^2) = s_+ s_- + s_- s_+$.

## Descomposición de productos tensoriales y suma de momento angular

Otra manera de armar representaciones a partir de dos representaciones irreducibles, es a partir del producto tensorial $\otimes$. En física, a esto nos referimos cuando decimos que consideramos un *sistema de dos partículas*. Para dos partículas de spin $j_1$ y $j_2$, el sistema total puede estar en un estado que pertenzca al espacio vectorial

$$V_{j_1} \otimes V_{j_2} \,. \tag{16}$$

Junto con la manera natural de actuar de los generadores

$$(s_i)_{12} = (s_i)_1 \otimes 1 + 1 \otimes (s_i)_2 \,, \qquad i = x, y, z \,, \tag{17}$$

esto define una nueva representación. Esta representación no puede ser nueva, ni tiene por qué ser irreducible, pero **necesariamente tiene que ser una combinación de las representaciones irreducibles** que ya construimos. Los ejemplos típicos para el caso de $\mathfrak{su}(2)$ son

$$V_{1/2} \otimes V_{1/2} = V_1 \oplus V_0 \,, \qquad V_1 \otimes V_{1/2} = V_{3/2} \oplus V_{1/2} \,. \tag{18}$$

Aquí, los números cuánticos a la izquierda de las igualdades refieren a los Casimires de los operadores $(s^2)_1$ y $(s^2)_1$, mientras que los de la derecha refieren al Casimir[1] del spin total, $\vec{j}^2 = (\vec{s}_1 + \vec{s}_2)^2$. En el primer caso trabajamos con los números cuánticos $\{s_1, s_{z,1}, s_2, s_{z,2}\}$, mientras que en el segundo usamos $\{s_1, s_2, j, j_z\}$. Abusando un poco de la notación y escribiendo sólo las dimensiones de los espacios vectoriales correspondientes, tenemos

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1 \,, \qquad 3 \otimes 2 = 4 \oplus 2 \,. \tag{19}$$

[1]Un elemento de Casimir de un grupo es un operador que conmuta con todos los elementos del álgebra. Por ejemplo, el Casimir del álgebra de momento angular es $L^2$.

Los productos internos que permiten *cambiar de base*, es decir los estados de una base en términos de la otra, son los denominados coeficientes de Clebsch-Gordan. En general, puede verse que la combinación de spines $s_1$ y $s_2$ sólo puede dar lugar a representaciones con spin $|s_1 - s_2| < j < s_1 + s_2$.

11. Demuestre que si el spin total satisface $|s_1 - s_2| < j < s_1 + s_2$ y todas estas representaciones aparecen en la descomposición, la dimensionalidad a ambos lados de

$$V_{s_1} \otimes V_{s_2} = \bigoplus_{j=|s_1-s_2|}^{s_1+s_2} V_j \tag{20}$$

es consistente.

12. Escriba explícitamente el mapa entre las bases que utilizaría a derecha e izquierda de las identidades (18).

13. Descomponga el producto $2 \otimes 2 \otimes 2$ en suma de representaciones irreducibles. Pista: use el hecho de que los distintos subespacios deben ser ortogonales entre sí, y piense en la(s) simetrías de intercambio.

## ¿Qué implica que una interacción sea invariante ante cierta simetría?

Finalmente, consideramos la relación entre simetrías y amplitudes de probabilidad. Supongamos que un operador $U = e^{iH_{\text{int}}}$ caracteriza la evolución temporal asociada a una interacción (por ejemplo la fuerza fuerte), conmuta con los operadores $j_i$ de alguna simetría generada por operadores que satisfacen un álgebra $\mathfrak{su}(2)$ (por ejemplo el spin o el isoespín), es decir que $[U, j_i] = 0$. En otras palabras $U$ conmuta con $j_z$ y también con los operadores de subida y bajada.

14. Demuestre que si $[U, j_z] = 0$ entonces la amplitud $\langle jm'|U|jm\rangle$ sólo puede ser no nula si $m = m'$.

15. Demuestre que si $[U, j_\pm] = 0$ entonces la amplitud $\langle jm|U|jm\rangle$ es independiente del valor de $m$.

16. Demuestre que si $[U, j^2] = 0$ entonces la amplitud $\langle jm|U|j'm'\rangle$ sólo puede ser no nula si $j = j'$.

La máxima información que puede obtenerse a partir de este tipo de restricciones está caracterizada por el *teorema de Wigner-Eckart*. Si le interesa, puede encontrar más información sobre este punto en los libros de Física Teórica 2.)