ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

PRIMER CUATRIMESTRE DE 2025

PRÁCTICA 4: CINEMÁTICA RELATIVISTA

1. **Postulados.** La Relatividad especial postula que: (1) las leyes de la física y (2) la velocidad de la luz c son las mismas en cualquier sistema de referencia inercial.

   a) Muestre que esto implica que una transformación $x \to x'(t,x)$ y $t \to t'(x,t)$ entre sistemas inerciales tiene que ser de la forma

   $$x' = \gamma(v)(x - vt)\,, \qquad t' = \gamma(v)\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\,, \qquad \gamma(v) \equiv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\,.$$

   b) **Dilatación temporal.** El tiempo (propio) de vida media de los muones es $\tau_\mu \approx 2 \times 10^{-6}s$. Sin embargo, luego de crearse cuando los rayos cósmicos llegan a la atmósfera, les toma $t \approx 7 \times 10^{-6}s$ llegar a la superficie del mar. ¿Cómo puede ser que no decaigan antes?

   c) Calcule la relación entre la velocidad u (en la dirección x) medida en un sistema S y la velocidad u' que se mide en un sistema S' que se mueve a velocidad v (también en x) respecto de S.

2. **Transformaciones de Lorentz.** El intervalo infinitesimal ds se define como

   $$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu\,, \qquad \eta = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)\,.$$

   a) Muestre que tanto los boosts como las rotaciones espaciales dejan invariante a ds. Es por esto que tiene sentido la definición del tiempo propio τ según $d\tau = c^{-1}ds$.

   b) Podemos describir a las transformaciones de Lorentz como $x^\mu \to x^{\mu'} = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ donde $\Lambda^T\eta\Lambda = \eta$. Escriba las matrices Λ asociadas a un boost en x y a una rotación en el plano xy.

   c) Muestre que la cuadri-velocidad $U^\mu = dx^\mu/d\tau$ cumple las siguientes propiedades

   $$U = \gamma(v)\begin{pmatrix} c \\ \vec{u} \end{pmatrix}\,, \qquad U' = \Lambda U\,,$$

   donde $u = d\vec{x}/dt$.

   d) El cuadri-momento de una partícula masiva se define como $P = mU$. Escríbalo en términos de la energía y el momento lineal e interprete el valor de la componente temporal P^0. Tome el límite $m \to 0$ y describa el cuadrimomento de un fotón.

3. **Masa de un sistema de partículas**: En el marco Newtoniano, la masa de un sistemas compuesto por N objetos de masas m_i es simplemente $M = \sum_{i=1}^N m_i$. Ahora pasamos al marco de la relatividad especial.

a) Muestre que tres siguientes tres definiciones de masa de un sistema relativista:
   - $M^2 = P^2$, siendo $P^\mu = \sum_i p_i^\mu$,
   - $M = E_{\rm cm}$, siendo $E_{\rm cm} = \sum_i p^0_{i,{\rm cm}}$, y
   - M definida como solución de la condición $P^i = \gamma(V_{\rm cm}) M V^i{}_{\rm cm}$.

b) Muestre que la masa de un sistema de dos partículas de masas m_1 y m_2 es mayor o igual a la suma $m_1 + m_2$. Halle la diferencia entre la masa total y $m_1 + m_2$. Aplíquelo al caso de dos fotones, no colineales.

c) El resultado anterior se extiende al caso de N partículas. Escriba la expresión de la masa de una caja que contiene fotones cuyas energías son E_i (asuma que no son colineales).

4. Muestre que en una desintegración de un cuerpo en el estado inicial, a dos cuerpos en el estado final, *i.e.* $A \to BC$, las energías de las partículas B y C están cinemáticamente determinadas en función del cuadrimomento de la partícula incidente A. Empleando esta disgresión, calcule el impulso del muón en la desintegración $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$, suponiendo que el pión se encuentra inicialmente en reposo. ¿Qué distancia recorrería este muón en el vacío (en promedio) antes de desintegrarse?

5. **Energía umbral.** Considere un proceso $1 + 2 \to 3 + 4$, en el que las partículas iniciales y las finales son distintas, y asuma que $m_1 = m_2$ y $m_3 = m_4$.

   a) En el sistema CM, halle la energía cinética mínima de $1 + 2$ para que el proceso sea posible. Considere los casos $m_3 > m_1$ y $m_3 < m_1$.

   b) En el sistema en que la partícula 1 se halla en reposo, halle la energía mínima con la que debe incidir la partícula 2 para que el proceso sea posible.

   c) Halle la energía mínima con la que deben colisionar dos fotones para dar lugar a un par electrón-positrón.

6. **Neutrinos.** Discuta la cinemática del decaimiento del neutrón que llevó a suponer la existencia del neutrino. Es decir, la cinemática de un proceso en el cual al neutrón se lo ve decaer en un electrón y un protón como parte del estado final.

7. **Tiempo de vida media.** Calcule el impulso del muón en la desintegración $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$, suponiendo que el pión se encuentra inicialmente en reposo. En términos del tiempo de vida media del muón τ_μ, ¿qué distancia recorrería este muón en el vacío (en promedio) antes de desintegrarse?

   (*Sugerencia: recuerde que el valor de τ_μ corresponde al tiempo propio del muón, es decir que se mide en el sistema en el que está en reposo.*)

8. **Antiprotones.** Los primeros antiprotones fueron creados en el Bevatrón (Berkeley) en la reacción $pp \to ppp\bar{p}$. En tal caso se utilizó un haz de protones de energía E que colisiona con un blanco fijo de protones. Se pregunta:

   a) ¿Cuál sería la energía mínima necesaria (umbral) E para producir dicho antiprotón?

   b) ¿Cómo cambiaría la situación en caso de colisionar dos haces de protones en lugar de utilizar un blanco fijo?

(Nota histórica: los primeros antiprotones fueron descubiertos cuando el acelerador alcanzó la energía cercana a los 6 GeV.)

9. **Aniquilación electrón-positrón.** Muestre que el proceso $e^+e^- \to \gamma$ está cinemáticamente prohibido para $m_\gamma = 0$.

   a) ¿De qué forma podría ser posible dicha desintegración de pares dando origen a sólo fotones?

   b) ¿Qué ocurriría si el fotón tuviese una masa distinta de cero?

10. Considere el proceso elástico $\bar{\nu}_\mu + e^- \to \bar{\nu}_\mu + e^-$. Demuestre que en el sistema del laboratorio, donde el electrón se halla originalmente en reposo, el ángulo de emisión θ del electrón respecto del antineutrino incidente está dado por

$$\sin^2\theta = \frac{2m}{T+2m}\left(1 - \frac{T}{E_\nu} - \frac{mT}{2E_\nu^2}\right),$$

    donde m es la masa del electrón, E_ν la energía del antineutrino incidente y $T = E - m$ la energía cinética del electrón saliente.

11. **Resonancia.** Considere ahora un proceso en el que una partícula de masa m_1 incide sobre otra partícula de masa m_2 en reposo. Para ciertos valores de la energía cinética T de la partícula incidente pueden formarse un estado ligado (o una partícula fundamental, como veremos) inestable, denominado *resonancia*, que llamaremos X. Esta aparición se manifiesta como un pico en la sección eficaz en el proceso $1\,2 \to 1\,2$, y puede pensarse como una contribución de un proceso de la forma $1\,2 \to X \to 1\,2$.

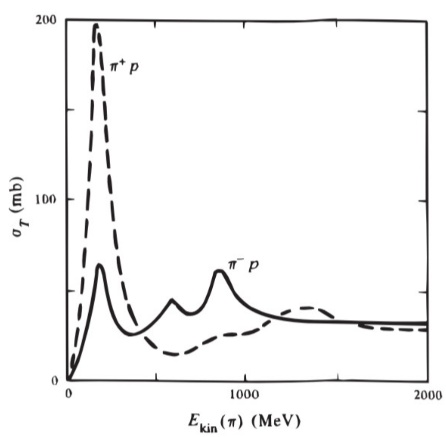

Figure 5.35: Total cross section as a function of pion kinetic energy for the scattering of positive and negative pions from protons. (1 mb = 1 millibarn = 10^{-27} cm^2.)

   a) Halle la energía cinética T_i que debe tener la partícula incidente para que se produzca una resonancia de masa M. Como caso particular, considere la energía a la que debe incidir un anti protón sobre un protón en reposo para obtener la resonancia correspondiente al bosón de Higgs, localizada alrededor de $M_H \approx 125$ GeV.

   b) Considere ahora la situación inversa: obtuvo datos del scattering de 1 y 2 (como el de la figura) y nota que hay picos en la sección eficaz a ciertas energías de las partícula incidente T_i. Halle las masas de la resonancia X_i en cada pico.