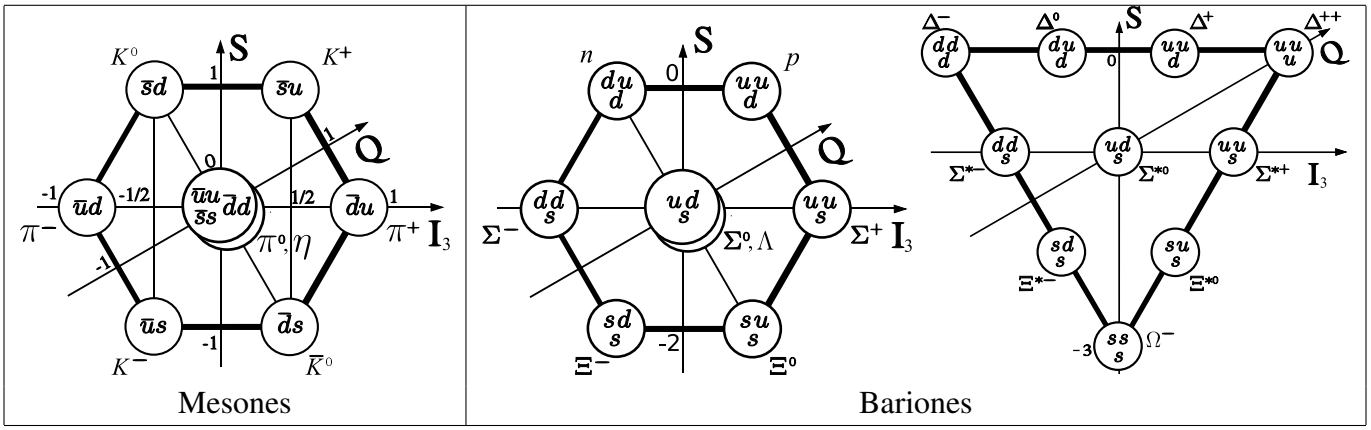
# ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

## PRIMER CUATRIMESTRE DE 2018

## PRÁCTICA 3: MODELO DE QUARKS Y SIMETRÍA SU(3)




Mesones | Bariones

1. **Álgebra de Lie de SU(3).** Una transformación de simetría $U$ asociada al grupo SU(3) se puede escribir como

$$\Psi'(x) = U(\varepsilon^a)\Psi(x) = e^{i\varepsilon^a \frac{\lambda_a}{2}}\Psi(x) \quad a = 1,\ldots,8$$

donde $\varepsilon^a$ son ocho parámetros reales que caracterizan la transformación, y $\lambda_a$ son las matrices de Gell-Mann, el análogo de las matrices de Pauli pero para SU(3):

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Sabiendo que las matrices $U$ de SU(3) deben ser de 3x3, a coeficientes complejos, unitarias y tener determinante 1, justifique por qué la matrices $\lambda_a$ deben generar un espacio vectorial de dimensión 8, y explique por qué las de Gell-Mann en particular conforman una base adecuada.

b) Muestre que los generadores $\lambda_a$ satisfacen relaciones análogas a las de las matrices de Pauli de SU(2)

| $SU(2)$ | $SU(3)$ |
|---|---|
| $tr\,\sigma_i = 0$ | $tr\,\lambda_a = 0$ |
| $tr\,\sigma_i\sigma_j = 2\delta_{ij}$ | $tr\,\lambda_a\lambda_b = 2\delta_{ab}$ |
| $[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}] = i\,\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}$ | $[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}] = i\,f_{abc}\frac{\lambda_c}{2}$ |

donde las constantes de estructura $f_{abc}$ son antisimétricas ante el intercambio de cualquier par de índices, y están dadas por $f_{123} = 1$, $f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = \frac{1}{2}$).

c) Verifique que $\lambda_1$, $\lambda_2$, y $\lambda_3$, generan rotaciones en el espacio de isospín, con la matriz diagonal $I_3 = \frac{1}{2}\lambda_3$ y operadores de subida/bajada $I_\pm \equiv \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2)$. Es (en parte) por la presencia de esta subálgebra que lo que hicimos en la guía pasada no perdería relevancia aunque la simetría de sabor fuera exactamente SU(3). Sin embargo, SU(3) tiene otra matriz diagonal, a la que le asociamos la *hipercarga* $Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$, o, equivalentemente, la *extrañeza* $S = Y - \frac{1}{3}$. También puede aparecer el número bariónico $B$, que es simplemente $1/3$ para todos los quarks.
(Vamos a usar los símbolos $I_3$, $Y$ y $S$ tanto para los operadores como para sus autovalores.)

d) Verifique que , $U_\pm \equiv \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7)$, y $V_\pm \equiv \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5)$ son los operadores de subida y de bajada de otras dos subálgebras SU(2): el $U$-spin (no confundir con las matrices del grupo) y el $V$-spin. Dé un argumento para justificar que estos y el $I$-spin **no son independientes** entre sí.

e) La carga eléctrica se define en este contexto como $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$. Muestre que todos los elementos de un multiplete de $U$ deben tener la misma carga eléctrica.

2. **Representaciones fundamental (3) y anti-fundamental ($\bar{3}$).** La representación **fundamental** es la de los quarks, donde las matrices del álgebra de SU(3) simplemente actúan por multiplicación sobre la base

$$\{u,d,s\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La anti-fundamental, también de dimensión 3, es la de los anti-quarks. Se trata simplemente de la representación conjugada, donde las matrices que actúan por multiplicación y la base correspondiente son

$$\rho_a \equiv \rho(\lambda_a) = -(\lambda_a)^*, \qquad \{\bar{u},\bar{d},\bar{s}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Verifique que las matrices $\rho_a$ satisfacen las mismas reglas de conmutación que las matrices $\lambda_a$.

b) Represente en el plano de cargas $I_3$ e $Y$ los quarks $\{u,d,s\}$, por un lado, y los anti-quarks $\{\bar{u},\bar{d},\bar{s}\}$, por el otro. Para esto, calcule $\rho(I_3)$ e $\rho(Y)$ y muestre que los anti-quarks tienen sus cargas cambiadas de signo.

c) Sabiendo que los autovalores de una transformación lineal diagonalizable son independientes de la base elegida, explique por qué la representación de los generadores de SU(3) dada por las matrices $\rho_a$ (junto con el espacio vectorial sobre el que actúan) no es un simple cambio de base con respecto a las $\lambda_a$. En otras palabras, las representaciones **3** y $\overline{\mathbf{3}}$ no son equivalentes.

d) Muestre cómo actúan $I_\pm$, $U_\pm$ y $V_\pm$ sobre los elementos de las bases respectivas $\{u,d,s\}$ y $\{\bar{u},\bar{d},\bar{s}\}$. Preste atención a los signos. Concluya que, por ejemplo, $I_- \cdot \bar{u} = 0$, $I_- \cdot \bar{d} = -\bar{u}$ y $I_- \cdot \bar{s} = 0$, y describa cómo se organizan estos estados en multipletes del SU(2) de isoespín asociado a $I_\pm$ e $I_3$.

e) Muestre que el estado $\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$ es un singlete, es decir, es invariante ante cualquier transformación del grupo SU(3).

f) Explique por qué, a diferencia de lo que pasa en SU(3), en SU(2) sí es cierto que la representación fundamental y la anti-fundamental son equivalentes. Para esto, reorganice la base $\{\bar{u},\bar{d}\}$ de $\overline{\mathbf{2}}$, sobre la cual actúan los generadores $\rho(\sigma_i) = -(\sigma_i)^*$, tomando en su lugar $\{-\bar{d},\bar{u}\}$ y vea cómo actúan los generadores en esta nueva base.

3. **Mesones (estados $q\bar{q}$).** Asuma que el grupo de simetría de sabor es SU(3).

   a) Describa la descomposición mesónica $\mathbf{3}\otimes\overline{\mathbf{3}} = \mathbf{8}\oplus\mathbf{1}$. Haga todos los diagramas de cargas en el plano $I_3, Y$ necesarios.

   b) Una vez elegida la representación, por ejemplo en el caso del octete, diga cuántos números cuánticos son necesarios para etiquetar a los distintos estados inequívocamente.

   c) Calcule las funciones de onda de los distintos estados del octete y la del singlete.

   d) Verifique que el mesón $\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$ se obtiene actuando con $I_\pm$ sobre los mesones $\pi^- = d\bar{u}$ y $\pi^+ = u\bar{d}$, respectivamente. Encuentre en qué número cuántico se diferencia de los otros mesones que tienen las mismas cargas $I_3$ e $Y$. (Sugerencia: recuerde que además de $I_3$ hay el otro número cuántico que caracteriza al isoespín).

   **Nota:** el octete mesónico que discutimos es el de partículas de spin $s = 0$, hay otro similar con $s = 1$.

4. **Bariones (estados $qqq$).** Asuma que el grupo de simetría de sabor es SU(3).

   a) Describa la descomposición bariónica $\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}\otimes\mathbf{3} = \mathbf{10}\oplus\mathbf{8}_{\mathrm{MS}}\oplus\mathbf{8}_{\mathrm{MA}}\oplus\mathbf{1}$. Haga todos los diagramas de cargas $I_3, Y$ necesarios.

   b) Calcule las funciones de onda del decuplete partiendo de los estados $uuu$, $ddd$ y $sss$ y utilizando operadores de subida y bajada. Observe qué simetría de intercambio tienen los estados de **10**.

   c) Arme las funciones de onda de los octetes bariónicos (el mixto-simétrico y el mixto-antisimétrico) partiendo de los estados que no involucran quarks $s$ y $\bar{s}$ y utilizando lo que ya sabe sobre el caso de SU(2).

   d) Discuta nuevamente, una vez elegida la representación, cuántos números cuánticos son necesarios para etiquetar a los distintos estados inequívocamente. Verifique que el resutlado es el mismo que en el ejercicio anterior.

   e) Muestre que el singlete es el estado totalmente antisimétrico ante cualquier intercambio.

   f) Discuta la existencia de las partículas $\Sigma^0$ y $\Lambda$, que corresponden a un mismo octete, y tienen los mismos valores de extrañeza $S = -1$ y componente de isospin $I_3 = 0$. ¿En qué se diferencian entonces? ¿Cómo reflejan sus respectivas funciones onda de sabor esta diferencia?

5. El operador asociado al momento magnético anómalo se define como

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2}\sum_i \mu_i (S_z)_i\,, \quad \mu_i = \frac{Q_i|e|}{2m_i}\,,$$

   donde el índice $i$ corre sobre las distintas partículas que constituyen al nucleón, $S_z$ es el operador que mide la proyección del spin (no el isospin!), mientras que $Q_i|e|$ y $m_i$ son las respectivas cargas eléctricas y masas. Sabiendo que $m_u = m_d = 360$ MeV y $m_s = 540$ MeV, combine apropiadamente

las funciones de onda de sabor y spin de la partícula $\Lambda$ en las representaciones correspondientes a los octetes simétrico y antisimétrico dadas por

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{mixta}-\text{anti}} &= \frac{1}{\sqrt{12}}\left(2(ud-du)s+(us-su)d+(sd-ds)u\right)\\
\Phi_{\text{mixta}-\text{sim}} &= \frac{1}{2}\left((ds+sd)u-(us+su)d\right)\\
\chi^{\uparrow}_{\text{mixta}-\text{anti}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow\right)\uparrow\\
\chi^{\uparrow}_{\text{mixta}-\text{sim}} &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left((\uparrow\downarrow+\downarrow\uparrow)\uparrow-2\uparrow\uparrow\downarrow\right)
\end{aligned}$$

y calcule su momento magnético anómalo.

6. Compare las masas los distintos hadrón (bariones y mesones) que puede encontrar en cualquier tabla de partículas con que se obtendría sumando las masas de sus quarks constituyentes.

7. La fuerza electromagnética da lugar a una interacción spin-spin que, en términos de energía, puede escribirse de la siguiente manera:

$$\Delta E \sim -\frac{2}{3}\sum_{i>j}\vec{\mu}_i\cdot\vec{\mu}_j\,,$$

donde $\vec{\mu}_i$ son los momentos magnéticos anómalos de las distíntas particulas involucradas. Pues bien, la fuerza fuerte genera una interacción similar, en las que las cargas eléctricas están reemplazadas por factores asociados a la cargas de color. Esto da lugar a la siguiente corrección a las fórmulas de masa para los mesones:

$$m(q_1\bar{q}_2) = m_1+m_2+a\,\frac{\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2}{m_1m_2}\,,$$

donde $a$ es una constante positiva con unidades apropiadas asociada a los grados de libertad de color (y al acoplamiento de la fuerza fuerte, $\alpha_s$, el equivalente de la constante de estructura fina del electromagnetismo).

a) Usando que los piones tienen spin $s=0$, muestre que

$$m(\pi) = m_u+m_d-\frac{3a}{m_um_d}\,,$$

(sugerencia: encuentre la relación entre el operador $\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2$ y los spines total y de cada partícula, es decir, $S_1^2$, $S_2^2$ y $S_{\text{tot}}^2$) y estime el valor de $a$ para obtener una masa $m_\pi$ cercana a la observada experimentalmente.

b) Haga lo mismo para la partícula de spin $s=1$ denominada $K^*$, formada a partir de los quarks $u\bar{s}$ y estime la masa con el valor de $a$ utilizado para optimizar el cálculo de $m_\pi$. Compare con el valor tabulado.

8. Para bariones, la corrección análoga a la del ejercicio anterior es de la forma

$$m(q_1q_2q_3) = m_1+m_2+m_3+\frac{a'}{2}\sum_{i>j}\frac{\vec{\sigma}_i\cdot\vec{\sigma}_j}{m_im_j}\,.$$

con alguna otra constante positiva $a'$. Considere la partícula $\Delta^{++}$ del decuplete, formada a partir de tres quarks $u$.

*a*) Dado que la función de onda se factoriza como

$$|\Delta^{++}\rangle = |\text{spin}\rangle \otimes |\text{sabor}\rangle \otimes |\text{color}\rangle\,,$$

y que únicamente se observan en la naturaleza los singletes de color, explique por qué queda una única posibilidad para el correspondiente spin $s(\Delta^{++})$ y cuánto vale.

*b*) Use lo que acaba de deducir para ver que

$$m(\Delta^{++}) = 3m_u + \frac{3a'}{2m_u^2}\,.$$

*c*) Muestre que si $m_u = m_d$, la corrección de masa del neutrón es de la misma magnitud y signo opuesto. Compare la predicción para $m(\Delta) + m(n)$ con $6m_u \approx 2160MeV$.

*d*) Compare las estimaciones de $m(\Delta)$ y $m(n)$ con los valores experimentales, despeje un valor aproximado para $a'$, y compárelo con lo que obtuvo en el punto anterior para el caso mesónico.

9. **Reglas de selección.** Asuma simetría de sabor SU(3) exacta y considere únicamente interacciones fuertes.

a) Explique por qué los siguientes decaimientos están prohibidos:

$$K^- \to \pi^- + \pi^0\,, \qquad \Sigma^0 \to p + \pi^-\,.$$

b) Diga si los siguientes procesos pueden suceder y relacione sus secciones eficaces:

$$K^- + p \to \pi^0 + \Lambda\,, \qquad \bar{K}^0 + n \to \pi^0 + \Lambda\,.$$

c) Explique por qué el siguiente proceso no pueden suceder:

$$K^+ + \Xi^- \to \pi^0 + \Lambda\,.$$

10. **Predicción de la partícula $\Omega^-$ a partir de la simetría SU(3).** En 1961, Gell-Mann propuso la organización de los bariones de espín $3/2$ según una simetría de sabor $SU(3)$, construyendo un **decuplete de bariones**. Esta estructura predice la existencia de una partícula aún no descubierta en ese entonces, llamada $\Omega^-$, cuyas propiedades pueden deducirse analíticamente.

(a) Justifique las cargas $Q$, $S$ y $J$ de la partícula que corresponde al vértice inferior del decuplete.

(b) Experimentalmente se conocían las masas de los otros bariones del decuplete:

$$M(\Delta) \approx 1232\ \text{MeV}/c^2$$
$$M(\Sigma^*) \approx 1385\ \text{MeV}/c^2$$
$$M(\Xi^*) \approx 1530\ \text{MeV}/c^2$$

Suponiendo una progresión lineal de masas con respecto a la extrañeza, estime $M(\Omega^-)$.

(c) Argumente por qué la partícula $\Omega^-$ en reposo no puede decaer mediante la interacción fuerte.

**Nota:** Este ejercicio reproduce de manera simplificada el razonamiento que llevó al descubrimiento experimental de la partícula $\Omega^-$ en 1964. Además de la masa, su vida media de $\sim 10^{-10}s$ se estimó sabiendo que sólo podía decaer por interacciones débiles.