ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

PRIMER CUATRIMESTRE DE 2018

PRÁCTICA 6: FORMULACIÓN LAGRANGIANA

1. Dada la densidad lagrangiana de un campo escalar complejo,
$$\mathscr{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi,$$
   (a) Halle las simetrías del problema, y diga qué grupo forman.
   (b) Halle las ecuaciones de movimiento utilizando la parte real y la parte imaginaria de $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ como campos independientes.
   (c) Halle las ecuaciones de movimiento utilizando ahora ϕ y ϕ^* como campos independientes y muestre que son equivalentes a las del ítem anterior.
   (d) Demuestre que para un lagrangiano genérico que sea real ambos procedimientos dan lugar a ecuaciones equivalentes.
   (e) ¿Como se modifican los puntos 1 y 2 si se agrega al lagrangiano el término $-V(\phi\phi^*)$?

2. Considere la siguiente densidad lagrangiana
$$\mathscr{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* + \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - m^2 \phi^* \phi - M^2 \varphi^* \varphi - V(\varphi, \phi)$$
donde $V(\varphi, \phi)$ es una función de los módulos de ambos campos, y donde m representa un parámetro constante de la teoría.
   (a) Obtener las ecuaciones de movimiento. Nótese que hay dos campos (y complejos!).
   (b) Calcular los momentos canónico conjugados al campo ϕ y al campo φ.
   (c) Halle las simetrías de esta densidad lagrangiana y diga qué grupo forman. ¿ Como deben ser las masas M y m y qué forma debe tener V para que el grupo de simetría sea $U(2)$
   (d) Si se hace, en este lagrangiano, el reemplazo $\partial_\mu \to \partial_\mu - ieA_\mu$, ¿cuál sería el nuevo momento canónico conjugado al campo ϕ?

3. Para el caso de un campo escalar, los lagrangianos de interés serán aquellos invariantes ante la siguiente transformación: $\phi \to \tilde{\phi}(x) = \phi(x+\xi)$, siendo ξ un cuadrivector constante arbitrario. Esta única expresión comprende en realidad 4 transformaciones independientes dado que $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$.
   (a) ¿Cuáles son las expresiones de ξ que corresponden a la simetría ante traslaciones en cada una de las direcciones, espaciales y temporales?
   (b) Considere el lagrangiano del campo escalar masivo libre, y muestre que es invariante ante traslaciones espaciales y temporales.
   (c) Siguiendo con el campo escalar, halle la expresión de las corrientes y cargas conservadas en todos los casos.
   (d) Muestre que la carga asociada a la invariancia respecto a traslaciones temporales es definida positiva.

4. Considere el Lagrangiano:

$$L = \bar{\psi}\gamma^\mu i\partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi.$$

   (a) Halle la ecuación de movimiento, variando respecto a $\bar{\psi}$.
   (b) Compare con la que se obtiene variando respecto a ψ.
   (c) Halle las simetrías de este lagrangiano. Obtenga, en particular, la corriente de Noether asociada a las simetrías *internas*, es decir, las que no afectan los argumentos x^μ de los campos en cuestión.

5. Considere la densidad lagrangiana de tres partículas de Dirac libres,

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}_1(x)(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_1)\psi_1(x) + \bar{\psi}_2(x)(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_2)\psi_2(x) + \bar{\psi}_3(x)(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_3)\psi_3(x)$$

   (a) ¿Cuál es el grupo de simetría de este Lagrangiano?
   (b) ¿ Cómo cambiaría la respuesta anterior si las tres masas fueran iguales¿A qué le hace acordar?

6. Considere la siguiente acción

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x \left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu\right), \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,,$$

   (a) Encuentre las simetrÃas para los casos $m \neq 0$ y $m = 0$.
   (b) Derive las ecuaciones de movimiento provenientes de esta acción.
   (c) Explique por qué se dice que el campo de Proca ($m \neq 0$) tiene tres grados de libertad, mientras que el campo de Maxwell tiene solo dos.
   (d) Muestre que para $m \neq 0$ las ecuaciones de movimiento implican $\partial_\mu A^\mu = 0$. Explique qué magnitud física asociaría al valor de la constante m.
   (e) Muestre que, para $m = 0$, se obtienen las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético. Compruebe, ademÃ¡s, que existe una elección de gauge tal que las ecuaciones de movimiento toman la forma son $\partial^\rho\partial_\rho A^\nu = 0$.
   (f) Siguiendo con el caso $m = 0$, escriba la acción en función de los campos eléctrico y magnético (E y B respectivamente), y relacione estas cantidades con las cantidades T y V (energía cin ética y energía potencial, respectivamente) de la mecánica clásica. Interprete la analogía resultante.

7. Considere el lagrangiano de Dirac acoplado a un campo de Maxwell

$$\mathscr{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu\,.$$

   (a) Escriba este lagrangiano aislando las partes libres y la de interacción.
   (b) Muestre explícitamente que cada uno de estos términos es un escalar de Lorentz y, por lo tanto, también lo es el lagrangiano.
   (c) Halle todas las simetrías de este Lagrangiano.

(d) Derive las ecuaciones de Euler-Lagrange para esta teoría de campos.

8. Confeccione un lagrangiano cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange devengan en la siguiente ecuación de movimiento

$$\partial^\mu \partial_\mu \theta(\overrightarrow{x}, t) = 2\lambda e^{2\theta(\overrightarrow{x}, t)},$$

siendo λ un parámetro constante de la teoría.