ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

PRIMER CUATRIMESTRE DE 2025

PRÁCTICA 5: ECUACIONES DE KLEIN-GORDON Y DIRAC

1. **Ecuación de Klein-Gordon.** Considere una partícula cuya función de onda está descrita por un escalar de Lorentz $\phi(x)$. Es decir que, ante transformaciones de Lorentz, tenemos $\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x)$, y por lo tanto $\phi(x)$ es un invariante.

- a) En el caso relativista, ϕ debe satisfacer la ecuación de movimiento

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0, \quad \square \equiv \partial_\mu \partial^\mu.$$

Busque una solución de onda plana $\phi_p(x) = e^{\pm i p \cdot x}$ con $p \cdot x \equiv p_\mu x^\mu$ y muestre que esta solución de la ec. de KG es compatible con la relación de dispersión relativista $E^2 = m^2 + \vec{p}^2$ ($c = 1$).

- b) Demuestre que, en el límite no relativista $m^2 \gg \vec{p}^2$, esta función de onda satisface la ecuación de Shrödinger. Para esto, deberá imponer una condición sobre el signo de la energía.
- c) Calcule la densidad de probabilidad ρ y la corriente de probabilidad $\vec{J}$ para una solución genérica de la ecuación de KG, y muestre que se satisface la ecuación de conservación $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$. (Sugerencia: considere la diferencia entre la ec. de movimiento y su conjugada, luego de ser multiplicadas por el conjugado de una solución.)

2. **Matrices de Dirac.** Considere las matrices

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

- a) Muestre que definiendo $\gamma^0 \equiv \beta$ y $\gamma^i \equiv \beta \alpha^i$ se verifica que

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}.$$

Estas matrices γ constituyen la representación de Dirac.

- b) Muestre que la conjugación hermítica da como resultado $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$.

- c) Existen otras representaciones, entre ellas la de Weyl:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}.$$

Muestre que estas matrices satisfacen las mismas relaciones de anticonmutación que las anteriores.

3. **Ecuación de Dirac.** En este caso consideramos partículas en la representación de Dirac del grupo de Lorentz, que tiene dimensión 4 (¿no es la única! ¿se le ocurre otra?). Su ecuación de movimiento, en notación covariante, es de la forma

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0.$$

- a) En este contexto, ψ es un objeto de cuatro componentes denominado espinor de Dirac. Muestre que si $\psi(x)$ es solución de la ec. de Dirac, entonces cada una de sus componentes satisface la ecuación de KG, o sea, que $(\square + m^2)\psi^\alpha(x) = 0$ para $\alpha = 1, 2, 3, 4$.
- b) Halle el Hamiltoniano que permite escribir la ec. de Dirac como una ecuación de Schrödinger,

$$H\psi = i\partial_t\psi.$$

- c) Operando como en el caso de KG, calcule la densidad y la corriente de probabilidad asociada a las soluciones de la ec. de Dirac. Como esperamos que las soluciones describan partículas cargadas como los electrones, insertamos un factor $-e$ en estas cantidades para describir la densidad y corriente de carga. Muestre que el resultado puede describirse en términos del objeto $J^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ con $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$, y que la ecuación de conservación puede escribirse de manera covariante como $\partial_\mu J^\mu = 0$.

4. Soluciones de partícula y antipartícula.

- a) Proponiendo una solución a la ec. de Dirac de la forma

$$\psi(x) = Ae^{ip\cdot x} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

dónde u y v tienen dos componentes cada uno y $p\cdot x = p_\mu x^\mu$, halle las cuatro soluciones en reposo ($\vec{p} = 0$) linealmente independientes: las que tienen energía positiva $E = m$, denominadas $u^{(1)}(m, \vec{0})$ y $u^{(2)}(m, \vec{0})$, y las que tienen energía negativa $E = -m$, denominadas $v^{(1)}(m, \vec{0})$ y $v^{(2)}(m, \vec{0})$. Las primeras son soluciones de partícula, por ejemplo un electrón, mientras que las segundas son soluciones de antipartícula, por ejemplo un positrón.

- b) Escriba el sistema de ecuaciones acopladas que deben satisfacer $u(m, \vec{p})$ y $v(m, \vec{p})$ en el caso $\vec{p} \neq 0$. Encuentre las soluciones de energía positiva y negativa $u^{(1)}(m, \vec{p})$, $u^{(2)}(m, \vec{p})$, $v^{(1)}(m, \vec{p})$ y $v^{(2)}(m, \vec{p})$.
- c) Para las soluciones de partícula libre con $E > 0$, verifique que en el límite no relativista las componentes inferiores del espinor de Dirac son de orden $|\vec{v}|$ respecto de las superiores (en realidad $|\vec{v}|/c$ si no tomamos $c = 1$), y que, a primer orden, estas últimas tienen la forma de una solución de Schrödinger de tipo onda plana multiplicada por un espinor de Pauli de dos componentes (independiente del momento).

5. Momento angular total y Spin. La ec. de Dirac incorpora naturalmente el grado de libertad de spin. Para verlo,

- a) demuestre que el Hamiltoniano de Dirac no conmuta con el operador de impulso angular orbital $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, que por lo tanto no describe una cantidad conservada, mientras que H sí conmuta con el de impulso angular total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, con $\vec{S}$ dado por

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{2}\vec{\Sigma}, \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix},$$

- b) y muestre que el operador $\vec{S}$ definido de esa manera satisface las relaciones de conmutación del álgebra de Lie de SU(2), y además S_z tiene autovalores $\pm 1/2$.

c) Indique los posibles autovalores del operador $\vec{J}^2 = (\vec{L} + \vec{S})^2$ para soluciones de la ec. de Dirac.

6. **Factor giromagnético del electrón.** En mecánica cuántica, una partícula libre de masa m y carga q en un campo electromagnético externo satisface la ecuación de Shrödinger-Pauli

$$\left(\frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi - \vec{\mu} \cdot \vec{B} \right) \psi = \varepsilon \psi,$$

donde hemos incluido el momento magnético $\vec{\mu} = -\frac{gq}{2m}\vec{S}$, con g el factor giromagnético, y su interacción con el campo B . Muestre que para electrones, realizando la sustitución $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A}$ y $E \rightarrow \varepsilon_{NR} + m - q\Phi$ en la ec. de Dirac, concentrándose en las componentes superiores, y tomando el límite no relativista y de campos externos débiles, se deduce la ec. de Shrödinger-Pauli, junto con la predicción de que $g_e = 2$. Este resultado había sido experimentalmente observado y faltaba la explicación.

7. **Espinores y sus transformaciones de Lorentz 1.** Considere una transformación de Lorentz que, sobre el vector posición, actúa como $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$. Queremos deducir la manera en la que actúa sobre un espinor de Dirac ψ , es decir, deducir cuál es la matriz asociada S_Λ (que no es la matriz Λ , sino la representación de la misma transformación en el espacio de espinores) tal que $\psi \rightarrow \psi' = S_\Lambda \psi$.

a) Demuestre pidiendo que la ec. de Dirac sea covariante ante transformaciones de Lorentz equivale a imponer la condición

$$S_\Lambda^{-1} \gamma^\mu S_\Lambda = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

b) Para una transformación infinitesimal definida en términos de parámetros $\varepsilon_{\mu\nu}$, muestre que la definición

$$S = 1 - \frac{1}{8} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \varepsilon^{\mu\nu}$$

cumple con la condición deducida en el ítem anterior.

c) Compruebe que los generadores $s_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ también satisfacen las reglas de conmutación del álgebra de Lie del grupo de Lorentz:

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = ig_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma} L_{\mu\rho} + ig_{\mu\sigma} L_{\nu\rho}.$$

Estas expresiones son simplemente una manera alternativa de describir los conmutadores de los generadores usuales de boosts y rotaciones, es decir, las componentes L_{ij} y L_{0i} de

$$L_{\mu\nu} \equiv i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) = -L_{\nu\mu}.$$

Para convencerse, muestre que (para tres dimensiones espaciales) se recuperan las expresiones más familiares

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk} L_k, \quad [L_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk} K_k, \quad [K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk} L_k,$$

definiendo

$$L_i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} L_{jk}, \quad K_i \equiv L_{0i}.$$

8. Espinores y sus transformaciones de Lorentz 2.

- a) Considere una rotación espacial finita en 2π en el plano (x^1, x^2) , o sea, alrededor del eje $\hat{z}$. Sobre un espinor, esta transformación actúa de la siguiente manera:

$$\psi \rightarrow S_{12}(2\pi)\psi, \quad S_{12}(2\pi) = \exp\left(-\frac{i}{2} \times 2\pi \times \frac{i}{4}[\gamma^1, \gamma^2]\right).$$

Muestre, a partir de las definiciones de las matrices de Dirac, que

$$\frac{i}{4}[\gamma^1, \gamma^2] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}.$$

Explique por qué esto implica que $\psi \rightarrow S_{12}(2\pi)\psi = -\psi$, lo cual es consistente con la naturaleza fermiónica de los espinores de Dirac.

- b) Si tiene tiempo, muestre que las soluciones generales (con momento definido) de la ec. de Dirac pueden obtenerse a partir de las soluciones en reposo mediante un boost apropiado.

9. Espinores y sus transformaciones de Lorentz 3. Demuestre las siguientes propiedades:

- a) $S^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}$
 b) $\bar{\psi}' = \bar{\psi} S^{-1}$ con $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$.
 c) $\bar{\psi}\psi$ es invariante de Lorentz.
 d) $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ es un cuadvivector.

10. Quiralidad 1. Resulta útil definir el operador de quiralidad $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Muestre que cumple las siguientes propiedades.

- a) γ^5 es hermítico, de cuadrado unitario, y tiene autovalores ± 1 .
 b) γ^5 anticonmuta con las cuatro matrices de Dirac γ^μ .
 c) Los operadores $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$,

$$\begin{array}{ll} \text{son proyectores} & P_\pm^2 = P_\pm \\ \text{sobre espacios disjuntos} & P_+ P_- = 0 \\ \text{y complementarios} & P_+ + P_- = 1 \end{array}$$

y proyectan sobre los subespacios de quiralidad positiva (R) y negativa (L): $\gamma^5 P_\pm \psi = \pm \psi$.

- d) $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ es un pseudoescalar y $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ es un pseudo-cuadvivector.

11. Quiralidad 2. Considere la ec. de Dirac pero utilizando la representación de Weyl (ver ejercicio 2).

- a) Muestre que en esta representación la función de onda se puede escribir $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$, donde $\psi_L = P_L\psi$ y $\psi_R = P_R\psi$.
 b) Muestre que para partículas muy livianas o ultrarelativistas, la ecuación de Dirac se desacopla en dos ecuaciones diferentes para ψ_L y ψ_R .

12. **Helicidad 1.** Muestre que el operador de *helicidad* $h \equiv \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \cdot \hat{P}$ con $(\hat{P} = \vec{P}/|\vec{P}|)$, que da la proyección del spin en la dirección de movimiento, conmuta con el Hamiltoniano de Dirac y con el operador de impulso $\vec{P}$, de forma tal que se lo puede agregar a estos para formar un conjunto completo de observables que conmutan.

(Sugerencia: actúe con los conmutadores $[h, H]$ y $[h, \vec{P}]$ sobre una base de autoestados de $\vec{P}$.)

13. **Helicidad 2.** Demuestre que en el límite altamente relativista, la acción de γ^5 sobre los espinores $u(\vec{p})$ es la misma que la del operador de helicidad, es decir que γ^5 coincide con el operador de helicidad

$$\gamma^5 u(\vec{p}) = (\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}) u(\vec{p}).$$

Por otro lado, verifique que, en el mismo límite, para las antipartículas la quiralidad y la helicidad resultan opuestas

$$\gamma^5 v(\vec{p}) = -(\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}) v(\vec{p}).$$

14. **Helicidad 3.** La helicidad de una partícula masiva no es un concepto invariante de Lorentz, en particular no es invariante ante boosts. Sin embargo, la helicidad sí es invariante de Lorentz para partículas no masivas.

- a) Dé un argumento heurístico que establezca que, para una partícula masiva, es posible hallar un cambio de sistema de referencia que invierta el signo de su velocidad sin modificar el del spin.
- b) Muestre que γ^5 conmuta con cualquier $S(\Lambda)$, y use los resultados del ejercicio anterior para ver que esto implica que, en el caso no masivo, la h es un invariante de Lorentz.