Estructura de la materia 4 - Primer cuatrimestre del 2025

Guía 9: Teoría electro-débil (EW)

Modelo de Fermi – ¿Se acuerdan de la quiralidad? ¿Y de los neutrinos?

1. **Corrientes conservadas, masas y quiralidades 1.** Aquí enfatizamos algunos detalles relacionados a la quiralidad, un concepto clave para la descripción de las interacciones débiles.

   a) En la guía 5 definimos los proyectores de quiralidad $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$, y las componentes $\psi_R = P_+\psi$ y $\psi_L = P_-\psi$. Muestre que el lagrangiano de Dirac libre puede escribirse como

   $$L_\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R - m\left(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L\right) .$$

   b) Muestre que si L_ψ tiene simetría global U(1) para $\psi \to e^{i\alpha}\psi$, no hay simetría ante transformar ψ_L y ψ_R *con fases distintas.*

   c) Muestre si (y sólo si) $m = 0$ hay además simetría ante $\psi_L \to e^{i\alpha_L}\psi_L$ y $\psi_R \to e^{i\alpha_R}\psi_R$.

   d) Muestre que esta simetría doble puede expresarse como $\mathrm{U}(1)_L\times\mathrm{U}(1)_R$, donde se actúa independientemente sobre las partes izquierda y derecha.

   e) Encuentre las corrientes conservadas asociadas a los subgrupos $\mathrm{U}(1)_L$ y $\mathrm{U}(1)_R$ como combinación lineal de la corriente eléctrica $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ y de $j_5^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$.

2. **(*) Corrientes conservadas, masas y quiralidades 2.** Misma idea pero con dos campos.

   a) Muestre que el lagrangiano del caso $m_1 = m_2$,

   $$L = \sum_{i=1}^{2} \bar{\psi}_i(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_i\,,$$

   tiene simetría global U(1)×SU(2). Recuerde considerar el doblete $\Psi = \binom{\psi_1}{\psi_2}$.

   b) Encuentre las corrientes conservadas. Tiene que haber 4 por la cantidad de generadores.

   c) En el límite de masas nulas, considere los dobletes de isospin que conocemos gracias a los decaimientos $\beta^\pm$: $\binom{\nu_e}{e}$ (hay otras equivalentes para los leptones μ y τ y sus respectivos neutrinos) y $\binom{p}{n}$ (si bien no son partículas fundamentales, son fermiones y se los puede describir con campos de Dirac). En ambos casos, encuentre combinaciones lineales de las corrientes que tengan carga eléctrica total 1 y -1.

   d) Muestre que el lagrangiano del ítem anterior se puede escribir como

   $$L = \sum_{i=1}^{2} \left[\bar{\psi}_{i,L} i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{i,L} + \bar{\psi}_{i,R} i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{i,R} - m\left(\bar{\psi}_{i,L}\psi_{i,R} + \bar{\psi}_{i,R}\psi_{i,L}\right)\right] .$$

   e) Muestre si $m = 0$ hay simetría $\mathrm{U}(1)_L\times$ $\mathrm{SU}(2)_L\times\mathrm{U}(1)_R\times$ $\mathrm{SU}(2)_R$. En este caso es útil considerar los dobletes $\Psi_L = \begin{pmatrix}\psi_{1,L}\\ \psi_{2,L}\end{pmatrix}$ y $\Psi_R = \begin{pmatrix}\psi_{1,R}\\ \psi_{2,R}\end{pmatrix}$.

f) Encuentre las corrientes conservadas asociadas a cada subgrupo. (Hay 4 *de cada lado.*)

3. **(*) Teoría de Fermi.** Se trata de una teoría efectiva para los decaimientos $\beta^{\pm}$

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e \,, \qquad p \to n + e^+ + \nu_e \,,$$

a partir del lagrangiano de interacción[1]

$$L_{\text{int}} = -G_F \left[\bar{p}\gamma^{\mu}(1 - c_5\gamma^5)n \; \bar{e}\gamma_{\mu}(1 - c_5\gamma^5)\nu_e + \text{h.c.} \right]$$

donde $G_F \approx 1{,}66 \times 10^{-5}\text{GeV}^{-2}$ y c_5 son constantes determinadas experimentalmente y h.c. representa los conjugados hermíticos de los primeros términos de manera tal que L_{int} es real.

a) En su primera versión, con $c_5 = 0$, proponía una interacción corriente-corriente usando las que debería haber derivado en el ítem c) del problema 2. Dibuje los diagramas de Feynman de menor orden en G_F asociados a los procesos $\beta^{\pm}$ para $c_5 = 0$.

b) Más adelante los experimentos demostraron que las interacciones débiles no conservaban la paridad, lo que motivó la inclusión de las corrientes quirales. Muestre que para $c_5 = 1$, la componente R de los espinores asociados a los neutrinos electrónicos $\nu_{e,R} = \psi_{\nu_e,R} = P_+\psi_{\nu_e}$ se desacopla totalmente. Dado que los neutrinos no tiene carga eléctrica ni de color, y su masa m_{ν} es nula o cuanto menos extremadamente pequeña, esto significa que los *right-handed* neutrinos, si existen, son casi imposibles de observar.

c) A primera vista parece que en este lagrangiano con $c_5 = 1$ sólo el neutrino tiene quiralidad definida (y tiene que ser *left*). Sin embargo, muestre que la componente e_R de los electrones tampoco entra en juego en las interacciones débiles. Explique por qué esto no implica que dichas componentes sean difíciles de observar en el modelo estándar.

4. **Modelo de Fermi y universalidad leptónica.** Para los leptones más livianos, la interacción de Fermi es simplemente (incluyendo los proyectores de quiralidad del ejercicio anterior)

$$L_{\text{int}} = G_F (j^{\mu}_{(e)L})^{\dagger} j^{\nu}_{(e)L} g_{\mu\nu} \,, \qquad j^{\mu}_{(e)L} = 2\bar{\nu}_e\gamma^{\mu}P_- e \,.$$

Ahora bien, si incluimos a los demás leptones μ, ν_{μ}, τ y μ_{τ}, hay en realidad otras dos corrientes leptónicas:

$$j^{\mu}_{(\mu)L} = 2\bar{\nu}_{\mu}\gamma^{\mu}P_- \mu \,, \qquad j^{\mu}_{(\tau)L} = 2\bar{\nu}_{\tau}\gamma^{\mu}P_- \tau \,.$$

En principio, estas podrían acoplarse con distintas intensidades. Por ejemplo, podríamos tener interacciones como

$$G_F^{(e)} (j^{\mu}_{(e)L})^{\dagger} j^{\nu}_{(e)L} g_{\mu\nu} \,, \qquad G_F^{(\mu)} (j^{\mu}_{(\mu)L})^{\dagger} j^{\nu}_{(\mu)L} g_{\mu\nu} \,, \qquad G_F^{(e\mu)} (j^{\mu}_{(e)L})^{\dagger} j^{\nu}_{(\mu)L} g_{\mu\nu} \,.$$

Sin embargo, los experimentos muestran que hay una única constante de acoplamiento G_F universal. Explique por qué este resultado sugiere que la teoría de Fermi es sólo una descripción efectiva de las interacciones débiles, mientras que la descripción fundamental debería corresponder a una teoría de gauge no abeliana. (Sugerencia: recuerde la guía anterior.)

[1] Aquí p corresponde al espinor asociado a los protones ψ_p, e al de los electrones ψ_e, etc.

5. **(*) Modelo de Fermi con leptones y quarks.** la corriente débil leptónica total toma la forma
$$j^{\mu}_{\ell,L} = \bar{\nu}_e \gamma^{\mu}(1-\gamma^5)e + \bar{\nu}_{\mu}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)\mu + \bar{\nu}_{\tau}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)\tau\,.$$
Si además consideramos que se tienen los dobletes de isospin exactos de quarks (lo cual no es estrictamente cierto debido al ángulo de Cabibbo) $\left(\begin{smallmatrix} u \\ d \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} t \\ b \end{smallmatrix}\right)$, tenemos además la corriente débil de quarks
$$j^{\mu}_{q,L} = \bar{u}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)d + \bar{c}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)s + \bar{t}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)b\,.$$
El lagrangiano de Fermi asociado es entonces
$$L_{\text{int}} = -G_F g_{\mu\nu}(j^{\mu}_{\ell,L} + j^{\mu}_{q,L})^{\dagger}(j^{\nu}_{\ell,L} + j^{\nu}_{q,L})\,.$$

   a) Calcule explícitamente $(j^{\mu}_{\ell,L} + j^{\mu}_{q,L})^{\dagger}$ y describa los vértices de interacción de la teoría.

   b) Teniendo en cuenta los vértices del ítem anterior y el acoplamiento de todas estas partículas al electromagnetismo (QED), encuentre todos los canales de decaimiento del muón.

   c) En el modelo de Fermi combinado con QED, indique cuáles de los siguientes procesos son posibles (en cuyo caso dibuje algún diagrama) y cuáles no:

$$\begin{array}{llll@{\qquad}llll@{\qquad}llll}
(a) & e^-e^+ & \to & \mu^-\bar{\nu}_{\mu} & (b) & e^-\nu_e & \to & \mu^-\bar{\nu}_{\mu} & (c) & e^- & \to & \mu^-\bar{\nu}_{\mu}\nu_e \\
(d) & \mu^- & \to & e^-\bar{\nu}_e\nu_{\mu} & (e) & e^-e^- & \to & e^-e^- & (f) & \mu^+e^- & \to & \mu^+e^- \\
(g) & \tau^+e^- & \to & \nu_{\tau}\nu_e & (h) & \tau^+e^- & \to & \nu_{\mu}\nu_e & (i) & \mu^+e^- & \to & \gamma \\
(j) & \gamma\gamma & \to & \nu_e\nu_e & (k) & e^-\bar{\nu}_e & \to & \mu^-\bar{\nu}_{\mu} & (l) & e^+e^- & \to & \gamma\gamma\gamma \\
(m) & u\bar{u} & \to & d\bar{d} & (n) & s\bar{d} & \to & c\bar{c} & (o) & \nu_e s & \to & e^-c \\
(p) & c & \to & de^+\nu_e & (q) & \gamma\gamma & \to & \nu_e\bar{\nu}_e & (r) & e^-u & \to & s\nu_e
\end{array}$$

   Justifique utilizando los diagramas de Feynman y las leyes de conservación.

   d) Haga los mismo que en el ítem anterior para los decaimientos

$$\begin{array}{llll@{\qquad}llll@{\qquad}llll}
(a) & \Sigma^- & \to & \Lambda\pi^- & (b) & \pi^0 & \to & \gamma\gamma & (c) & K^- & \to & \pi^-\pi^0 \\
(d) & \Sigma^- & \to & n\pi^- & (e) & \Sigma^+ & \to & p\gamma & (f) & D^0 & \to & K^-\pi^+\pi^+\pi^-
\end{array}$$

6. **Ángulo de Cabibbo.** Los experimentos muestran que, en realidad, los autoestados débiles d' y s' en los dobletes y los autoestados de masa d y s no coinciden: están rotados en θ_c.

   a) Repita el ejercicio 7, ítems (m)-(r) teniendo en mente que $\theta_c \neq 0$.

   b) Muestre que el valor $\theta_c \approx 13°$ predice la siguiente relación entre los decaimientos del D^0: $K^-\pi^+ : \pi^-\pi^+ : K^+\pi^- \simeq 360 : 19 : 1$.

Gauge y unificación electro-weak – ¿Se acuerdan de las cargas Q e Y?

Ahora nos adentramos en la descripción de la teoría electro-débil a nivel fundamental, basada en una teoría de gauge con simetría (local) $\mathrm{U}(1)_Y \times \mathrm{SU}(2)_L$.

7. **Teoría de gauge U(1)×SU(2).** Empecemos con un caso simplificado, ignorando la quiralidad. Considere el lagrangiano del ítem a) del ejercicio 2. Escriba el correspondiente lagrangiano con simetría U(1)×SU(2) *local*. Para esto, deberá introducir la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_B B_\mu \frac{Y}{2} - i g_W W_\mu^a T^a \,.$$

Aquí hemos incluido 4 campos de gauge: B_μ corresponde al U(1), a veces llamado U$(1)_Y$, cuyo generador es $Y/2$, mientras que los W_μ^a corresponden al SU(2), con generadores $T^a = \frac{1}{2}\sigma^a$. Note que Y debe ser proporcional a la identidad de manera que conmute con los T^a.

8. **(*) Interacciones débiles como teoría de gauge.** Para trabajar con la parte *left*, como indican las interacciones débiles, es necesario ir al caso de masas nulas (al menos hasta la guía que viene). Considere el lagrangiano del ítem e) del ejercicio 2. La idea es *gaugear* **únicamente** el subgrupo U$(1)_Y\times$ SU$(2)_L$. Muestre que si Ψ es un doblete de isospin, resulta

$$L_{\Psi BW} = -g_B \bar\Psi_R \gamma^\mu B_\mu \frac{Y_R}{2}\Psi_R - \bar\Psi_L\gamma^\mu\left(g_B B_\mu \frac{Y_L}{2} + g_W W_\mu^3 \frac{\sigma_3}{2}\right)\Psi_L - g_W \bar\Psi_L \gamma^\mu \left(W_\mu^1 \frac{\sigma_1}{2} + W_\mu^2 \frac{\sigma_2}{2}\right)\Psi_L \,.$$

Note que Y_L tiene que ser proporcional a la identidad, mientras que Y_R podría ser cualquier matriz diagonal. En el lagrangiano EW, tenemos uno de estos términos **para cada doblete**. A esto es necesario agregarle, además, la parte cinética de Dirac $L_\Psi = i\bar\Psi\gamma^\mu\partial_\mu\Psi$ y también el lagrangiano de YM, es decir, la parte que corresponde únicamente a los campos de gauge:

$$L_{BW} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(B)F^{\mu\nu}(B) - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}(W)G^{\mu\nu,a}(W)\,.$$

En los ejercicios siguientes debería quedar clara la relación entre este lagrangiano y las interacciones débiles (tanto los resultados experimentales como la teoría de Fermi).

9. **Conservación de N_B y N_ℓ.** Basándose en la discusión del problema anterior, explique por qué se conservan el número leptónico y el número bariónico.

10. **(*) Bosones $W^\pm$ y corrientes débiles 1.** Considere el lagrangiano de interacción $L_{\Psi BW}$ del problema anterior.

    a) Identifique los términos no diagonales en el espacio de isospin, y explique por qué estos términos son únicos relevantes para los procesos $\beta^\pm$.

    b) Si bien los bosones de gauge importantes aquí son los W_μ^1 y W_μ^2, en la naturaleza se observan en realidad las combinaciones

    $$W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2)\,, \qquad W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + iW_\mu^2)\,.$$

    (No, no hay errores en los signos!). Muestre que los términos relevantes de la derivada covariante $\frac{1}{2}\left(W_\mu^1\sigma^1 + W_\mu^2\sigma^2\right)$ pueden rescribirse como proporcionales a $W_\mu^+ I^+ + W_\mu^- I^-$, donde $I^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^1 \pm i\sigma^2)$ son los operadores de subida y bajada del SU(2) de isospin.

c) Dado que los generadores $I^{\pm}$ corresponden a las matrices $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, muestre que para un doblete $\Psi_L = \begin{pmatrix} \psi_{1,L} \\ \psi_{2,L} \end{pmatrix}$ los términos de interacción con $W_\mu^{\pm}$ quedan escritos como

$$L_{\Psi,W^{\pm}} = -g_W \bar{\Psi}_L \gamma^\mu (W_\mu^1 \frac{\sigma_1}{2} + W_\mu^2 \frac{\sigma_2}{2}) \Psi_L = -\frac{g_W}{\sqrt{2}} \left(\bar{\psi}_{1,L} \gamma^\mu W_\mu^+ \psi_{2,L} + \bar{\psi}_{2,L} \gamma^\mu W_\mu^- \psi_{1,L} \right) .$$

Más aún, asumiendo que $\psi_{i,L} = P_- \psi_i$, muestre que

$$L_{\Psi,W^{\pm}} = -\frac{g_W}{\sqrt{2}} \left(W_\mu^+ \bar{\psi}_1 \gamma^\mu P_- \psi_2 + W_\mu^- \bar{\psi}_2 \gamma^\mu P_- \psi_1 \right) .$$

d) Considere los dobletes $\left(\begin{smallmatrix} \nu_e \\ e \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} p \\ n \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} u \\ d \end{smallmatrix}\right)$ y muestre que las corrientes que se acoplan con los $W_\mu^{\pm}$ son exactamente las que aparecieron en el modelo de Fermi.

11. **Bosones $W^{\pm}$ y corrientes débiles 2.** Sigamos con las interacciones del problema anterior, focalizándonos en el sector asociado a los dobletes de los leptones y quarks más livianos, $\left(\begin{smallmatrix} \nu_e \\ e \end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix} u \\ d \end{smallmatrix}\right)$.

   a) Dibuje los vértices de interacción correspondientes, y muestre que la conservación de la carga eléctrica implica que los bosones $W_\mu^{\pm}$ tienen carga ± 1, respectivamente.

   b) Dibuje los diagramas de Feynman (a primer orden en g_W) asociados a los decaimientos $\beta^{\pm}$ de n y p. Para esto, piense a los protones y neutrones como una combinación trivial de uud y ddu, respectivamente (esta es la idea detrás del **Bag model** y del modelo de partones). La idea es ver a los bosones $W_\mu^{\pm}$ como mediadores de las interacciones débiles.

   c) En las amplitudes asociadas a los diagramas del ítem anterior, aparecerá un factor g_W^2 y propagador de los $W_\mu^{\pm}$ que, asumiendo que sus masas m_W son iguales, toma la forma $-(p^2 - m_W^2)^{-1}$. Considere el régimen de bajas energías, en el que $p^2 \ll m_W^2$, y argumente por qué, a menos de factores numéricos de orden 1, esto da una predicción teórica

   $$G_F \sim \frac{g_W^2}{m_W^2} .$$

   d) Para que el análisis de los ítems anteriores tenga sentido es necesario que la masa m_W sea no nula. Explique por qué, en base a lo que vimos en la guía anterior, esto debería ser preocupante. Nos acercamos a entender el por qué del bosón de Higgs.

12. **(*) Bosones B_μ y W_μ^3 y unificación electro-débil.** Los bosones diagonales tampoco son los que se observan en la naturaleza. Estos últimos corresponden a las combinaciones

   $$A_\mu = \cos\theta_W \, B_\mu + \sin\theta_W \, W_\mu^3 , \qquad Z_\mu^0 = -\sin\theta_W \, B_\mu + \cos\theta_W \, W_\mu^3 .$$

   a) Muestre que la suma de los términos cinéticos (es decir, los cuadráticos) asociados a B_μ y W_μ^3 equivale a una suma de lagrangianos de Maxwell para A_μ y Z_μ^0, sin términos cruzados.

b) La notación no es casual: el campo A_μ es precisamente el del electromagnetismo. Partiendo de $L_{\Psi BW}$ para el doblete $\left(\begin{smallmatrix}\nu_e\\ e\end{smallmatrix}\right)$ y asumiendo que $\nu_{e,R} = P_+\nu_e = 0$ y por lo tanto e_R **es un singlete de isospin** muestre que el campo A_μ se acopla con la corriente

$$j^\mu_{\text{em}} = \frac{g_B \cos\theta_W}{2}\left(\bar\Psi_R\gamma^\mu Y_R\Psi_R + \bar\Psi_L\gamma^\mu Y_L\Psi_L\right) + \frac{g_W \sin\theta_W}{2}\bar\Psi_L\gamma^\mu\sigma^3\Psi_L$$

donde las contribuciones de electrones y neutrinos se factorizan como $j^\mu_{\text{em}} = j^\mu_{\text{em}(e)} + j^\mu_{\text{em}(\nu_e)}$

$$j^\mu_{\text{em}(e)} = \frac{g_B \cos\theta_W}{2}\left(Y_{e_R}\bar e_R\gamma^\mu e_R + Y_{e_L}\bar e_L\gamma^\mu e_L\right) - \frac{g_W \sin\theta_W}{2}e_L\gamma^\mu e_L$$

$$j^\mu_{\text{em}(\nu_e)} = \frac{g_B \cos\theta_W}{2}Y_{e_L}\bar\nu_{e,L}\gamma^\mu\nu_{e,L} + \frac{g_W \sin\theta_W}{2}\bar\nu_{e,L}\gamma^\mu\nu_{e,L}\,.$$

Aquí hemos usado que, para no romper la simetría SU(2) necesariamente $Y_{e_L} = Y_{\nu_{e,L}}$.

c) Para que la identificación del A_μ con el campo de fotones tenga sentido, las corrientes obtenidas en el punto anterior deben ser

$$j^\mu_{\text{em}(\nu_e)} = 0\,, \qquad j^\mu_{\text{em}(e)} = q_e\left(\bar e_R\gamma^\mu e_R + Y_{e_L}\bar e_L\gamma^\mu e_L\right) = q_e\bar e\gamma^\mu e\,.$$

Muestre que si $Y_{e_L} = -1$ y $Y_{e_R} = -2$ esto implica que

$$g_W \sin\theta_W = |e| = g_B\cos\theta_W\,.$$

El valor experimental para el ángulo θ_W es tal que $\sin^2\theta_W \approx 0{,}23$.

d) La letra Y tampoco es casual: se trata de la hypercarga de la guía 3. Recuerde que en términos de la carga eléctrica Q (en unidades de $|e|$) y de I_3 estaba definida como a partir de la relación $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$. Por lo tanto, argumente que entonces no es sorprendente que

$$Y_{e_L} = 2(Q_e - I_{3,e_L}) = 2\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = -1\,, \qquad Y_{e_R} = 2(Q_e - I_{3,e_R}) = 2(-1-0) = -2\,.$$

e) Considere los términos de interacción entre bosones de gauge contenidos en $G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu,a}$ y muestre que hay interacciones AW^+W^- y $Z^0W^+W^-$, pero no AZ^0Z^0. Interprete el resultado en términos de las cargas eléctricas.

13. **(*) Lagrangiano EW.** Escriba el lagrangiano electro-débil para todos los quarks y leptones del modelo estándar y los bosones A_μ, Z^0_μ y $W^\pm_\mu$. Dibuje todos los vértices de interacción.