

ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

PRIMER CUATRIMESTRE DE 2018

PRÁCTICA 6: FORMULACIÓN LAGRANGIANA

1. (*) Dada la densidad lagrangiana de un campo escalar complejo,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi,$$

- (a) Halle las simetrías del problema, y diga qué grupo forman.
- (b) Halle las ecuaciones de movimiento utilizando la parte real y la parte imaginaria de $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ como campos independientes.
- (c) Halle las ecuaciones de movimiento utilizando ahora ϕ y ϕ^* como campos independientes y muestre que son equivalentes a las del ítem anterior.
- (d) Demuestre que para un lagrangiano genérico que sea real ambos procedimientos dan lugar a ecuaciones equivalentes.
- (e) ¿Como se modifican los puntos 1 y 2 si se agrega al lagrangiano el término $-V(\phi\phi^*)$?

2. Considere la siguiente densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* + \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - m^2 \phi^* \phi - M^2 \varphi^* \varphi - V(\varphi, \phi)$$

donde $V(\varphi, \phi)$ es una función de los módulos de ambos campos, y donde m representa un parámetro constante de la teoría.

- (a) Obtener las ecuaciones de movimiento. Nótese que hay dos campos (y complejos!).
 - (b) Calcular los momentos canónico conjugados al campo ϕ y al campo φ .
 - (c) Halle las simetrías de esta densidad lagrangiana y diga qué grupo forman. ¿ Como deben ser las masas M y m y qué forma debe tener V para que el grupo de simetría sea $U(2)$
 - (d) Si se hace, en este lagrangiano, el reemplazo $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu$, ¿cuál sería el nuevo momento canónico conjugado al campo ϕ ?
3. (*) Para el caso de un campo escalar, los lagrangianos de interés serán aquellos invariantes ante la siguiente transformación: $\phi \rightarrow \tilde{\phi}(x) = \phi(x + \xi)$, siendo ξ un cuadrivector constante arbitrario. Esta única expresión comprende en realidad 4 transformaciones independientes dado que $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$.
- (a) ¿Cuáles son las expresiones de ξ que corresponden a la simetría ante traslaciones en cada una de las direcciones, espaciales y temporales?
 - (b) Considere el lagrangiano del campo escalar masivo libre, y muestre que es invariante ante traslaciones espaciales y temporales.
 - (c) Siguiendo con el campo escalar, halle la expresión de las corrientes y cargas conservadas en todos los casos.
 - (d) Muestre que la carga asociada a la invariancia respecto a traslaciones temporales es definida positiva.

4. (*) Considere el Lagrangiano:

$$L = \bar{\psi} \gamma^\mu i \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi.$$

- Halle la ecuación de movimiento, variando respecto a $\bar{\psi}$.
- Compare con la que se obtiene variando respecto a ψ .
- Halle las simetrías de este lagrangiano. Obtenga, en particular, la corriente de Noether asociada a las simetrías *internas*, es decir, las que no afectan los argumentos x^μ de los campos en cuestión.

5. (*) Considere la densidad lagrangiana de tres partículas de Dirac libres,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_1(x)(i\gamma_\mu \partial^\mu - m_1)\psi_1(x) + \bar{\psi}_2(x)(i\gamma_\mu \partial^\mu - m_2)\psi_2(x) + \bar{\psi}_3(x)(i\gamma_\mu \partial^\mu - m_3)\psi_3(x)$$

- ¿Cuál es el grupo de simetría de este Lagrangiano?
- ¿Cómo cambiaría la respuesta anterior si las tres masas fueran iguales? ¿A qué le hace acordar?

6. Considere la siguiente acción

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \left(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu \right), \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

- Encuentre las simetrías para los casos $m \neq 0$ y $m = 0$.
- Derive las ecuaciones de movimiento provenientes de esta acción.
- Explique por qué se dice que el campo de Proca ($m \neq 0$) tiene tres grados de libertad, mientras que el campo de Maxwell tiene solo dos.
- Muestre que para $m \neq 0$ las ecuaciones de movimiento implican $\partial_\mu A^\mu = 0$. Explique qué magnitud física asociaría al valor de la constante m .
- Muestre que, para $m = 0$, se obtienen las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético. Compruebe, además, que existe una elección de gauge tal que las ecuaciones de movimiento toman la forma $\partial^\rho \partial_\rho A^\nu = 0$.
- Siguiendo con el caso $m = 0$, escriba la acción en función de los campos eléctrico y magnético (E y B respectivamente), y relacione estas cantidades con las cantidades T y V (energía cinética y energía potencial, respectivamente) de la mecánica clásica. Interprete la analogía resultante.

7. (*) Considere el lagrangiano de Dirac acoplado a un campo de Maxwell

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu.$$

- Escriba este lagrangiano aislando las partes libres y la de interacción.
- Muestre explícitamente que cada uno de estos términos es un escalar de Lorentz y, por lo tanto, también lo es el lagrangiano.
- Halle todas las simetrías de este Lagrangiano.

(d) Derive las ecuaciones de Euler-Lagrange para esta teoría de campos.

8. Confeccione un lagrangiano cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange devengan en la siguiente ecuación de movimiento

$$\partial^\mu \partial_\mu \theta(\vec{x}, t) = 2\lambda e^{2\theta(\vec{x}, t)},$$

siendo λ un parámetro constante de la teoría.