Estructura de la materia 4 - Primer cuatrimestre del 2025

Guía 7: Teoría de Gauge U(1) y electrodinámica cuántica (QED)

Invariancia local o de *gauge* (caso abeliano)

1. **(*) Campo de Klein-Gordon complejo.**

   a) Considere la acción
   $$L[\phi] = (\partial^\mu \phi)^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \,.$$
   El primer término es el cinético, mientras que el segundo es el de masa. Verifique que la acción no es invariante ante transformaciones U(1) locales, es decir, ante cambios de fase $\phi \to e^{iq\alpha(x)}\phi$, $\phi^* \to e^{-iq\alpha(x)}\phi^*$ con $\alpha(x^\mu)$ una función arbitraria del espacio-tiempo, y q una constante.

   b) Considere ahora una modificación del caso anterior tal que el ϕ interactúa con un campo cuadrivectorial A_μ según
   $$L[\phi, A] = D^*_\mu \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + ...$$
   donde los punto suspensivos no involucran a ϕ, y D_μ es la llamada *derivada covariante* $D_\mu \equiv \partial_\mu - iqA_\mu$. Halle cómo debe actuar una transformación de gauge sobre A_μ para que los primeros términos de este lagrangiano sean invariantes.

   c) Muestre que el tensor $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ resulta ser invariante ante la transformación de A_μ hallada en el punto anterior. Esto permite proponer un término cinético para A_μ de la forma $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Verifique que la acción asociada a
   $$L[\phi, A] = D^*_\mu \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$
   resulta ser invariante de guage y también invariante de Lorentz. Este sistema se conoce como QED escalar. Muestre que la invariancia U(1) se mantiene en presencia de un potencial $V(|\phi|^2)$.

   d) La presencia de las derivadas covariantes introduce términos nuevos, llamados de interacción, que son cúbicos y cuárticos en los campos e involucran tanto a ϕ como a A_μ. Escríbalos explícitamente. Dada la presencia de la derivada covariante y del término de Maxwell, reconocemos que se trata del acoplamiento de ϕ con un campo electromagnético, e identificamos a q como la carga eléctrica de ϕ, que establece la intensidad de las interacciones.

   e) La presencia del término cinético para A_μ, indica que ya no se trata de un campo externo, sino de una variable dinámica del problema. Muestre que esta parte del lagrangiano no contiene términos de interacciones, es decir, autointeracciones de los fotones. En otras palabras, muestre que los términos cúbicos y cuárticos en A_μ se anulan automáticamente.

   f) Verifique que un término de masa para el fotón m^2A^2 rompería la invariancia U(1) local.

g) Halle las ecuaciones de movimiento del lagrangiano de QED escalar completas. Muestre que las de A_μ se pueden escribir como ecuaciones de Maxwell con fuentes asociadas a una corriente j^μ que depende solamente del campo escalar ϕ (apareció en la guía anterior) y está asociada a la simetría del lagrangiano ante transformaciones *globales* $\phi \to e^{iq\alpha}\phi$, $\phi^* \to e^{-iq\alpha}\phi^*$ con α constante, es decir, es la corriente de carga. Esto no es casualidad: el término de interacción es proporcional a $A_\mu j^\mu$.

2. **(*) Dirac y la electrodinámica quántica.** Considere ahora un campo de Dirac acoplado al campo electromagnético dinámico, es decir, la acción de QED propiamente dicha:

$$L_{\text{QED}} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + qA_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu\psi.$$

a) Muestre que esta acción es invariante ante la transformación de gauge conjunta $\psi \to \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi$, $A_\mu \to A'_\mu$, donde la transformación de A_μ es la misma del problema anterior.

b) Verifique que esta acción es invariante ante la transformación *global* $\psi \to \psi' = e^{i\alpha\gamma^5}\psi$, $A_\mu \to A_\mu$ si y sólo si el campo de spin $\frac{1}{2}$ tiene masa nula.

3. **Redundancia en el campo de gauge.** Fijemos la idea de que el campo A_μ contiene una redundancia en los grados de libertad asociada a las transformaciones de gauge.

a) Considere la siguiente configuración:

$$A_0 = \alpha t^2 \qquad A_1 = \beta x_1^4 \qquad A_2 = 0 \qquad A_3 = \gamma \sinh(\delta x_3)\,.$$

Muestre que $F_{\mu\nu}$ es cero para esta configuración, es decir, que este A_μ es *puro gauge*. Además, esto implica trivialmente que este A_μ es solución de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes. Halle la transformación de gauge que lleva a A_μ a la forma $A'_\mu = 0$.

b) ¿Cuál sería la forma más general de A_μ tal que $F_{\mu\nu}$ sea cero en todo el espacio-tiempo?

c) ¿Cuál es la expresión de A_μ para el caso de un campo eléctrico constante en el eje z? Recuerde la relación entre las componentes de $F_{\mu\nu}$ y los campos electrico y magnético.

4. **Grados de libertad del campo de Maxwell.** El campo A_μ es redundante. Muestre que, a pesar de tener 4 componentes reales, solamente describe 2 grados de libertad. En otras palabras, muestre que hay sólo dos soluciones independientes para sus ecuaciones de movimiento. Nos concentramos, por simplicidad, en el caso libre

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,.$$

a) Muestre que las ecuaciones de movimiento son invariantes de gauge.

b) Muestre que, a diferencia de lo que sucede con las componentes espaciales A_i, no aparece la derivada temporal de A_0. O sea, A_0 no tiene grados de libertad dinámicos.

c) Muestre que esto implica que A_0 está completamente determinado por las soluciones de A_i. Sumado a la libertad de gauge, que podemos usar para fijar alguna otra componente o combinación de componentes, esto garantiza que hay únicamente dos grados de libertad.

d) Muestre que, en ausencia de fuentes, siempre se puede fijar el gauge de manera tal que $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ se anule. Esto se conoce como gauge de Coulomb. Muestre que en este gauge $A_0 = 0$.

e) Muestre que en el gauge de Coulomb se deducen ecuaciones de onda para las componentes espaciales de A_μ. Encuentre explícitamente las soluciones de ondas planas, es decir, soluciones con momento p_μ definido $A_\mu(x) = e^{ip_\nu x^\nu} v_\mu(p)$ con v_μ un vector de polarización constante. Derive las condiciones $p_\mu p^\mu = 0$ y $p_\mu v^\mu = 0$. Esto muestra que A_μ describe un campo no masivo, y que sólo son soluciones las ondas planas con polarización transversal.

Interacciones y diagramas de Feynman

En la mecánica clásica de Newton y la mecánica cuántica de Schrödinger, las interacciones están caracterizadas por un potencial $V(\vec{x})$. Estos enfoques asumen implícitamente, que, por ejemplo en un sistema de dos cuerpos, la información sobre la posición de uno de ellos se transmite de manera instantánea al potencial que siente el otro. En relatividad, esto es inaceptable: ni siquiera la información puede viajar más rápido que la velocidad de la luz.

El paradigma de teoría de campos establece que las interacciones se producen a través del intercambio de partículas, conocidas como mediadores. En esta materia ya vimos dos ejemplos. Los fotones son los mediadores de una de las fuerzas fundamentales de la naturaleza: la que describe las interacciones electromagnéticas. Otro ejemplo son los *piones*, interpretados en su momento como mediadores (masivos) de las interacciones entre nucleones en una descripción *efectiva*, la teoría de Fermi. Luego se descubrió que los mediadores de la fuerza fuerte son en realidad los *gluones*, que estudiaremos en la guía siguiente.

En campos, los términos de interacción siguen siendo los que tomaríamos como parte del potencial en el lagrangiano, y pueden involucrar a distintos campos. Esto incluye todos los términos que no sean cinéticos o de masa, es decir, los que son de orden cúbico o superior. El método para describir su impacto en el cálculo de amplitudes de probabilidad en los procesos de dispersión (*scattering*) es análogo al de la teoría perturbativa utilizada en mecánica cuántica. En otras palabras, lo importante son los elementos de matriz entre los estados inicial y final de operadores dados por las potencias enteras del potencial, $\langle f|V^n|i\rangle$.

Lo que hizo Feynman fue inventar un método pictórico para calcular estos elementos de matriz. No tenemos tiempo de entrar en detalles, pero la idea es la siguiente. A cada término del potencial corresponde un *vértice de interacción*, mientras que la parte cinética corresponde a los *propagadores*. Dado un estado incial y final, las *patas externas* del diagrama, la idea es combinar estos elementos de todas las maneras posibles. La amplitud se calculará luego en base a la multiplicación de las expresiones matemáticas asociadas a cada parte del diagrama. Lo más importante para nosotros son las siguientes dos características.

- Cada interacción aporta, entre otras cosas, un factor asociado a la correspondiente constante de acoplamiento g (en QED, es la carga q). Si g es chica, la expansión en potencias de V es una expansión en potencias de g. Esto dice que, si g es pequeña, los diagramas más simples dan las contribuciones más importantes, es decir, las de orden más bajo.

- Estamos trabajando en unidades naturales, pero puede mostrarse que cada *loop* (circuito cerrado) en un diagrama aporta un factor $\hbar$. Esto quiere decir que, a *grosso modo* los diagramas sin loops son las contribuciones clásicas, mientras que los diagramas con loops dan las correcciones cuánticas.

5. **Campo escalar complejo autointeractuante.** Considere el Lagrangiano

$$L[\Phi] = (\partial^\mu \Phi)^* \partial_\mu \Phi - M^2 \Phi^* \Phi - g(\Phi^* \Phi)^2 \,.$$

   a) Dibuje el vértice de interacción y los propagadores de la teoría. Estos dibujos reflejan la idea de que $\Phi^\dagger$ crea partículas (ej: nucleones) o destruye antipartículas (antinucleones), mientras que Φ hace exactamente lo contrario.

   b) Si llamamos n y $\bar{n}$ a la partícula y antipartícula que surge de la cuantización del campo Φ, dibuje los diagramas de Feynman intervinientes en la dispersión partícula-antipartícula $n + \bar{n} \to n + \bar{n}$ hasta orden g^2. Luego, haga lo mismo para el caso $n + n \to n + n$.

6. **(*) Potencial de Yukawa.** Un modelo simple para partículas Φ (complejas) que interactúan a través de un mediador ϕ (real) de masa m viene dado por

$$L = \partial^\mu \Phi^* \partial_\mu \Phi - M^2 \Phi^* \Phi + \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - g \phi \Phi^* \Phi \,,$$

   donde $g \ll M, m$ es la constante de acoplamiento.

   a) Dibuje los vértices y propagadores de la teoría. Deben reflejar la idea de que ϕ crea o destruye mediadores (ej: mesones), que son sus propias antipartículas, mientras que $\Phi^\dagger$ crea partículas o destruye antipartículas.

   b) Argumente, en base a los vértices de interacción, que aunque la teoría no sea libre el número nucleónico, es decir $Q = N_{\mathrm{n}} - N_{\bar{\mathrm{n}}}$ se conserva. Indique cuál es la simetría asociada.

   c) Dibuje los diagramas de Feynman que contribuyen a orden más bajo $\Phi + \Phi \to \Phi + \Phi$.

7. **(*) Interacciones en QED 1.** Dibuje los vértices y propagadores asociados a los lagrangianos de QED escalar y QED acoplado a un campo de Dirac. Encuentre la principal diferencia entre una teoría y otra en términos de interacciones disponibles.

8. **(*) Interacciones en QED 2.** Para el campo de los electrones acoplado al campo electromagnético, dibuje los diagramas que dan las contribuciones de orden más bajo a los procesos conocidos como dispersión de Bahbah, de Møller, de Compton, y la aniqulación electrón-positrón:

$$e^- + e^+ \to e^- + e^+ \,, \qquad e^- + e^- \to e^- + e^- \,, \qquad e^- + \gamma \to e^- + \gamma \,, \qquad e^- + e^+ \to \gamma + \gamma \,.$$

9. **Interacciones en QED 3.** Repita el ejercicio anterior pero para el scattering de fotones $\gamma + \gamma \to \gamma + \gamma$, y muestre que en este caso es necesario incluir diagramas con loops. A nivel cuántico, resulta que sí hay interacción entre fotones! (mediada por pares electrón-positrón).

Electrodinámica en el modelo estándar

10. **Múltiples campos cargados eléctricamente.** La invariancia U(1) local de un lagrangiano requiere un único campo de gauge (A_μ) incluso si hay varios campos escalares o de Dirac acoplados a A_μ con distintas cargas.

a) Escriba el Lagrangiano invariante U(1) local que describe a dos campos de Dirac ψ_1 y ψ_2 acoplados con A_μ, siendo sus cargas eléctricas q_1 y q_2 (de manera que las derivadas covariantes no son exactamente las mismas). En este caso, la transformación de gauge es de la forma

$$\psi_1 \to e^{iq_1\alpha(x)}\psi_1\,, \qquad \psi_2 \to e^{iq_2\alpha(x)}\psi_2\,, \qquad A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\alpha(x)\,.$$

b) Reescriba este lagrangiano organizando los dos campos de Dirac en un doblete $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$. Muestre que la expresión de la derivada covariante y la transformación de gauge para Ψ pueden escribirse como $D_\mu = \partial_\mu - iQA_\mu$ y $\Psi \to \Psi' = e^{i\alpha(x)Q}\Psi$, con Q una matriz de 2×2 que debe encontrar.

c) Justifique por qué este Lagrangiano es invariante local ante U(1) y no ante U(1)×U(1) ni U(2) ni SU(2), a pesar de que la transformación se implemente por medio de una matriz de 2×2.

11. A fin de acercarnos al lagrangiano del modelo estándar, considere ahora todas las partículas fermiónicas del modelo estándar (las que conoce), y dé un lagrangiano que describa sus términos cinéticos y su interacción con el campo electromagnético.