Estructura de la materia 4 - Primer cuatrimestre del 2025

Apunte complementario de la guía 7

Teoría de campos *vs* mecánica cuántica *à la* Schrödinger

Sabemos que los electrones y positrones pueden aniquilarse, y en clase vimos varios procesos de dispersión donde esto sucede. La teoría, entonces, no puede pensarse en términos de la descripción de un sistema donde la cantidad de partículas se conserva. Esto establece una diferencia importante entre la mecánica cuántica y la física cuántica relativista: en la primera, el número de partículas se conservaba.

1. Considere el siguiente lagrangiano para una un campo escalar complejo ψ (no es un espinor!) no-relativista
$$L = i\psi^*\dot{\psi} - \frac{1}{2m}|\nabla\psi|^2 \,.$$
   a) Muestre que las ecuaciones de movimiento reproducen la ecuación de Shrödinger para ψ.

   b) Muestre que el lagrangiano es invariante ante $\psi \to e^{i\alpha}\psi$ (y $\psi^* \to e^{-i\alpha}\psi^*$) si α es constante.

   c) Calcule la corriente conservada j^μ asociada a dicha simetría.

   d) Muestre que la carga conservada correspondiente es
$$Q = \int d^3x j^0 = \int d^3x \psi^*\psi$$
   En mecánica cuántica, ψ representa la función de onda de una partícula y este resultado se interpreta como la conservación de la probabilidad total. Si se piensa en estados de dos o más partículas, la conclusión es que en el contexto no relativista el número total de partículas N_p se conserva.

   e) Muestre que los resultados anteriores se mantienen si se agrega un potencial $V(|\psi|^2)$. En el caso no relativista, N_p se conserva incluso cuando hay interacciones.

2. Ahora considere al caso relativista, empezando por simplicidad con un campo escalar complejo ϕ:
$$L = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2|\phi|^2 \,.$$
   a) Muestre que L es invariante ante $\phi \to e^{i\alpha}\phi$ y calcule la corriente conservada j^μ.

   b) Muestre que la carga conservada es en este caso
$$Q = \int d^3x i(\phi^*\partial_t\phi - \phi\partial_t\phi^*) \,.$$
   c) Una solución general puede expandirse en una base de ondas planas
$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E}} \left[a(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu} + b(\vec{p})^* e^{+ip_\mu x^\mu}\right] \,,$$

donde $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, y el segundo término está asociado a las antipartículas. Muestre que entonces la Q puede expresarse como

$$Q = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[|a(\vec{p})|^2 - |b(\vec{p})|^2 \right] .$$

Esto indica que, en el caso relativista, lo que se conserva no es el número total de partículas sino el número neto, para el que las antipartículas contribuyen negativamente, es decir, $N_{\mathrm{p}} - N_{\bar{\mathrm{p}}}$. En este sentido, en teoría de campos no pensamos a ϕ como la función de onda de una única partícula, sino como un campo cuyas excitaciones describen sistemas de muchas partículas. Como en el caso relativista aparecen las antipartículas, y aparece el concepto de aniquilación y creación de pares, no se conserva el número total sino la cantidad relativa. Esto es análogo a la relación entre el campo electromagnético y sus excitaciones, es decir, los fotones, para los cuales no podemos definir un límite no relativista dado que tienen masa nula.

3. El sistemas del problema anterior también tiene simetría de traslación temporal. Esto quiere decir que la energía total se conserva. Relacione este resultado con la discusión anterior sobre los números de partículas y antipartículas.

Resulta sutil extender el análisis de los problemas 1-3 al caso de Dirac. En ese caso el lagrangiano y la carga conservada asociada a la simetría $\psi \to e^{i\alpha}\psi$, $\overline{\psi} \to e^{-i\alpha}\overline{\psi}$ son

$$L = i\overline{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \,, \qquad Q = \int d^3x \overline{\psi}\gamma^0\psi = \int d^3x \psi^\dagger \psi \,.$$

Si pensamos en ψ como la función de onda de una única partícula (o antipartícula) la analogía con el caso no-relativista del problema 1 es evidente. En particular, la carga conservada no es otra cosa que la norma de la función de onda, y es definida positiva. En este sentido, la ecuación de Dirac consistuye una generalización directa de la de Schrödinger.

Sin embargo, esta no es la única interpretación posible: también podemos pensar en sistemas relativistas de muchas partículas y antipartículas. Dónde aparece, en este caso, el hecho de que las antipartículas contribuyen con signo *negativo* a la carga conservada? La sutileza está en que es complicado es incorporar la naturaleza fermiónica del problema para asegurarnos que la función de onda total sea antisimétrica ante el intercambio de partículas (y ante el de antipartículas). A nivel cuántico esto es fácil de implementar. Para un sistema bosónico con varios niveles de energía ϵ_i, los operadores de creación y destrucción satisfacen

$$[a_i^\dagger, a_j^\dagger] = [a_i, a_j] = 0 \,, \qquad [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \,,$$

donde $[A, B] = AB - BA$. En el caso fermiónico, en cambio, las relaciones correctas son con anticonmutadores $\{A, B\} = AB + BA$, es decir,

$$\{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = \{a_i, a_j\} = 0 \,, \qquad \{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij} \,.$$

Esto garantiza que $a_i^\dagger a_i^\dagger = 0$, es decir que un nivel no puede estar ocupado por más de una partícula, y que $a_i^\dagger a_j^\dagger = -a_j^\dagger a_i^\dagger$, es decir que los estados del sistema son antisimétricos. Como es usual, la estadística de Fermi-Dirac cambia signos (importantes!) con respecto a la de Bose-Einstein.

Ahora bien, el punto es que en el caso bosónico sabemos que

$$[a, a^\dagger] = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad [x, p] = i\hbar \,.$$

Esto es consistente con el hecho de que en el límite clásico $\hbar \to 0$, x y p conmutan entre sí. Para esta interpretación no es necesario que x y p sean estrictamente la posición y el momento: podemos considerar cualquier sistema en el que $x \equiv \phi$ representa una variable y $p \equiv \pi_\phi = \partial L/\partial\dot\phi$ es su momento conjugado, como garantizan los corchetes de Poisson. Pensar en este tipo de operadores a veces se denomina *segunda cuantización*, pero es un nombre un poco confuso, no hay nada que esté siendo cuantizado dos veces!

Lo interesante para nosotros es que la anlogía con el caso fermiónico lleva a una conclusión sorprendente. Podemos verlo explícitamente en el caso de Dirac, donde tenemos a ψ como variable inicial y a $\pi_\psi = \partial L/\partial\dot\psi = i\psi^\dagger$. Entonces,

$$\{a, a^\dagger\} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \{\psi, \psi^\dagger\} = \hbar \,,$$

lo que nos dice que en el límite clásico $\hbar \to 0$,

$$\{\psi, \psi^\dagger\} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \psi\psi^\dagger = -\psi^\dagger\psi \,.$$

Esto parece razonable a primera vista puesto que estamos tratando con fermiones, pero clásicamente no teníamos la intención de intepretar a ψ y $\psi^\dagger$ como operadores... y a pesar de eso, anticonumutan! Lo que se hace usualmente es decir que, en el límite clásico, las soluciones no son operadores pero son *números de Grassmann*. No hace falta entrar en ese detalle ahora. Lo impotante puede decirse intuitivamente: al calcular la carga Q al estilo del problema 2, vamos a obtener en el integrando algo del estilo de $Q \sim \int(a^*a + bb^*)$, pero ahora el orden importa, y esto lleva a $Q \sim \int(a^*a - b^*b) \sim \int(|a|^2 - |b|^2)$ como en el caso del escalar complejo. En términos de operadores, reconocemos términos del estilo $a^*a \to a^\dagger a = N$ como operadores *número*, de manera que recuperamos la conclusión más importante: para sistemas relativistas de muchos fermiones de Dirac, $Q = N_{\mathrm{p}} - N_{\bar{\mathrm{p}}}$.

El límite no relativista y los potenciales a los que estamos acostumbrados

1. **Potencial de Yukawa 2.** El modelo para partículas Φ (complejas) que interactúan a través de un mediador ϕ (real) de masa m viene dado por

$$L = \partial^\mu\Phi^*\partial_\mu\Phi - M^2\Phi * \Phi + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - g\phi\Phi^*\Phi \,,$$

   donde $g \ll M, m$ es la constante de acoplamiento.

   a) Dibuje los dos diagramas de Feynman que contribuyen al orden más bajo al scattering $\Phi + \Phi \to \Phi + \Phi$. Puede mostrarse que la amplitud correspondiente a la suma de estos dos diagramas toma la forma

$$\langle f|U_{\text{Yuk}}|i\rangle = i(-ig)^2 \left[\frac{1}{(p_1 - p_1')^2 - m^2} + \frac{1}{(p_1 - p_2')^2 - m^2}\right] (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \,,$$

   donde p_1 y p_2 son los cuadri-momentos iniciales, y p_1' y p_2' los finales. Esta expresión viene de considerar, en cada caso, dos vértices (aquí simplemente los factores de $-ig$) y un propagador (los denominadores, que son, básicamente, la inversa del operador $p_\mu p^\mu - m^2$ que aparece en los términos cuadráticos en ϕ en el lagrangiano).

b) Es conveniente definir una cantidad $\mathcal{M}$ según

$$\langle f|U_{\text{Yuk}}|i\rangle = i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_1'-p_2')$$

para sacarse de encima la delta de Dirac asociada a la conservación del momento y la energía. Muestre que, en el límite no relativista $|\vec{p}_i| \ll M$ se obtiene

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{(\vec{p}_1-\vec{p}_1')^2+m^2}\,.$$

Trabaje en el sistema CM donde $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \equiv \vec{p}$ y $\vec{p}_1' = -\vec{p}_2' \equiv \vec{p}'$.

c) La aproximación de Born establece que, a primer orden, en mecánica cuántica la amplitud análoga puede escribirse como

$$i\mathcal{M} = \langle\vec{p}'|V(r)|\vec{p}\rangle = -i\int d^3r e^{i(\vec{p}'-\vec{p})\cdot\vec{r}}V(\vec{r})\,,$$

donde $V(\vec{r})$ es el potencial de interacción en el límite clásico. Muestre, comparando con la amplitud obtenida desde teoría de campos, que esto implica

$$\int d^3r e^{i(\vec{p}'-\vec{p})\cdot\vec{r}}V(\vec{r}) = \frac{-g^2}{(\vec{p}-\vec{p}')^2+m^2}\,.$$

d) Muestre que esta ecuación se satisface para un potencial (de Yukawa) radial de la forma

$$V(\vec{r}) = V(r) = \frac{-g^2}{4\pi}\frac{e^{-mr}}{r}\,.$$

2. **Potencial de Coulomb.** Repita el ejercicio anterior para el scattering $e^-e^- \to e^-e^-$ en el contexto de QED, que, a orden más bajo, arroja

$$\mathcal{M} = e^2\frac{[\bar{u}(\vec{p}')\gamma^\mu u(\vec{p})][\bar{u}(\vec{q}')\gamma_\mu u(\vec{q})]}{(p'-p)^2}\,,$$

donde en denominador no hay término de masa dado que los fotones viajan a la velocidad de la luz. Derive el potencial de Coulomb:

$$V(\vec{r}) = V(r) = \frac{e^2}{4\pi r}\,.$$

Para esto, simplifique el cálculo usando que la expresión de los espinores $u(\vec{p})$ en directamente en el límite no relativista. Por ejemplo, trabajando con la representación quiral de las matrices γ^μ se obtiene $u(\vec{p}) \sim \sqrt{m}\left(\begin{smallmatrix}\chi\\ \chi\end{smallmatrix}\right)$ si $m \gg |\vec{p}|$.