

Teorías de Yang-Mills (YM) sin campos de materia

El objetivo de esta sección es generalizar el lagrangiano de Maxwell, que describe un campo de gauge asociado al grupo $U(1)$, al caso de grupos no abelianos. Nos interesan particularmente los casos de $SU(2)$ y $SU(3)$, los otros grupos de simetría que aparecen en el modelo estándar (además del de Lorentz). Sin embargo, casi es más fácil escribir lo necesario para cualquier grupo $SU(N)$ y después hacer preguntas sobre valores particulares de N . Lo importante es que, incluso en ausencia de otros campos de materia, la dinámica de los campos de gauge no abelianos, como los gluones, es fundamentalmente distinta a la de los fotones: ya no se trata de teorías libres.

1. **(*) Lagrangiano de YM.** Considere un grupo de Lie cuyos generadores T^a satisfacen un álgebra $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$, donde f^{abc} son las constantes de estructura, y están normalizadas de manera tal que $\text{Tr}[T^a T^b] = \frac{1}{2}\delta^{ab}$. Para el caso de $SU(N)$, hay $N^2 - 1$ generadores, es decir que $a = 1, 2, \dots, N^2 - 1$. Por ejemplo, para $SU(2)$ tenemos $T^a = \frac{1}{2}\sigma^a$ con $a = 1, 2, 3$, mientras que para $SU(3)$ tenemos las 8 matrices de Gell-Mann $T^a = \frac{1}{2}\lambda^a$. Definimos al campo de gauge W_μ , la derivada covariante D_μ y al tensor $G_{\mu\nu}$ que aparecerá en el término cinético en analogía al caso de Maxwell:

$$W_\mu = W_\mu^a T^a, \quad D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu, \quad G_{\mu\nu} = \frac{i}{g^2}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - ig[W_\mu, W_\nu],$$

con g la constante de acoplamiento de YM, que juega el rol de la carga. Notemos que W_μ es un campo matricial; en la notación más usual, podemos decir que hay $N^2 - 1$ campos de gauge distintos.

- a) Muestre que el lagrangiano de YM

$$L_{\text{YM}} = -\frac{1}{2} \text{Tr}[G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}] = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu, a}$$

es invariante ante transformaciones de gauge

$$W_\mu \rightarrow W'_\mu = U(x)W_\mu U^{-1}(x) - \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^{-1}(x), \quad U(x) = \exp[ig\alpha^a(x)T^a],$$

donde $U(x)$ es una matriz de $SU(N)$ *local*. No es necesario hacerlo de esta manera, pero, si le sirve, puede usar que como $SU(N)$ es simplemente conexo basta demostrarlo a primer orden en α , es decir, para transformaciones infinitesimales,

$$U(x) \approx 1 + ig\alpha^a(x)T^a.$$

- b) Muestre que un término de masa $m^2 W_\mu^a W^{\mu, a}$ rompería la simetría del ítem anterior.
- c) Muestre que, a diferencia de lo que sucede con el campo de Maxwell, L_{YM} contiene términos de (auto-)interacción entre los campos de gauge de orden cúbico y cuártico, proporcionales a g y g^2 respectivamente. Escriba estos términos explícitamente en notación matricial y en componentes.

d) Dibuje los vértices asociados a dichos términos de interacción a ser usados en la construcción de diagramas de Feynman.

2. **Transformaciones de los campos de gauge de SU(2).** La idea es resaltar la diferencia con una transformación de gauge del A_μ electromagnético.

a) Para el caso SU(2), halle la transformación de cada W_μ^a a primer orden en los parámetros α^a , tanto en el caso global como en el local.

b) Halle ahora la transformación finita usando la expresión

$$\exp\left(\frac{i\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)1_{2\times 2} + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{n}\cdot\vec{\sigma}$$

de una matriz genérica de $SU(2)$. Verifique el resultado del ítem previo a partir de la transformación finita.

3. (*) **SU(3) y conservación del color.** Para el caso del color y la fuerza fuerte hay 8 campos de gauge, que llamamos gluones.

a) Muestre que, en componentes, los términos de interacción toman la forma

$$g(\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a)f^{abc}W^{\mu,a}W^{\nu,b}, \quad g^2 f^{abc}f^{ade}W_\mu^b W_\nu^c W^{\mu,d}W^{\nu,e}.$$

Para SU(3), $f_{123} = 1$, $f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = \frac{1}{2}$.

b) Los campos de gauge no abelianos interactúan, lo que para el caso particular de QCD equivale a decir que tienen carga de color. Por lo tanto, los gluones en sí mismos tienen que pertenecer a alguna representación de SU(3). Esta es la representación adjunta, y es la de 8 dimensiones que aparece en el $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$. Argumente por qué esto implica que, en una base apropiada, podemos elegir a los 8 gluones como los que tienen los siguientes colores (y anticolores):

$$\left\{ r\bar{b}, b\bar{r}, r\bar{g}, g\bar{r}, b\bar{g}, g\bar{b}, \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}), \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b}) \right\}$$

(Sugerencia: recuerde la guía de mesones!)

c) Relacione la base del ítem anterior con la de los W_μ^a con $a = 1, \dots, 8$ de la base usual de las matrices de Gell-Mann. Para esto puede pensar en el producto $3 \otimes \bar{3}$ como filas y columnas en una matriz de 3×3 . Sólo hay 8 gluones porque estamos imponiendo que la matriz tenga traza nula.

d) Como sucede con la carga eléctrica en QED, la simetría SU(3) global implica que el color es una cantidad conservada. Dibuje nuevamente los diagramas de auto-interacción de gluones con la notación de doble línea, y explique por qué esto evidencia la conservación.

4. **U(N) vs SU(N).** En los casos anteriores hemos dejado un U(1) de lado por conveniencia. La razón está en que U(N) se puede pensar como U(1) $\times$ SU(N) (al menos en términos de sus álgebras) de tal forma que el generador del álgebra de este U(1) conmute con los de SU(N).

- a) Muestre que si propone ahora *gaugear* el grupo completo, proponiendo $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu \mathbf{1} - igW_\mu^a T_a$, la invariancia de gauge se logra con una transformación en la que el campo A_μ no se mezcla con los W_μ^a , y donde la transformación de A_μ es la usual del campo de Maxwell.
- b) Muestre que el lagrangiano de YM en el caso $U(N)$ es exactamente la suma del de Maxwell y del de YM para $SU(N)$. En $N = 3$, y en el lenguaje del ejercicio anterior, lo que agregamos fue *la traza*.

El caso $N = 2$ de este ejercicio será importante al discutir la fuerza electro-débil.

Cromodinámica cuántica (QCD)

5. **Doblete de escalares complejos.** Considere el lagrangiano

$$L = (\partial^\mu \Phi)^\dagger \partial_\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix},$$

donde Φ es un doblete de campos complejos de igual masa.

- a) Muestre que el lagrangiano es invariante ante $SU(2)$ global, es decir, ante

$$\Phi \rightarrow e^{\frac{ig}{2} \alpha^a \sigma^a} \Phi$$

con tres parámetros α^a arbitrarios pero constantes.

- b) Dibuje los vértices de interacción de la teoría y dibuje los diagramas que contribuyen al proceso $\Phi + \Phi \rightarrow \Phi + \Phi$ a orden más bajo en λ .
 - c) Realice las modificaciones necesarias para que el modelo tenga invariancia $SU(2)$ local, es decir, la misma transformación de antes con $\alpha^a = \alpha^a(x)$. En particular, debe incluir campos de gauge $W_\mu = W_\mu^a T^a$ con $a = 1, 2, 3$, una derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu$, y un término cinético para W_μ .
 - d) Escriba los nuevos vértices de interacción junto con los nuevos vértices de la teoría, y dibuje nuevamente los diagramas que contribuyen al proceso $\Phi + \Phi \rightarrow \Phi + \Phi$ a orden más bajo no trivial en λ y en g .
 - e) Muestre que, en este caso particular, los términos que aparecen en D_μ , $G_{\mu\nu}$, y en la transformación del campo de gauge W_μ pueden escribirse en notación vectorial, es decir, en términos de $\vec{\alpha} \cdot \vec{W}_\mu$, $\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu$ y $\vec{\alpha} \times \vec{W}_\mu$, respectivamente. Esto es porque las constantes de estructura de $SU(2)$ coinciden con $\varepsilon_{a,b,c}$, y recupera la notación original del paper de Yang y Mills.
 - f) Repita el ejercicio entero con $U(2)$ en vez de $SU(2)$.
6. (*) **El $SU(3)$ de color y QCD para un quark.** Considere un quark u . Por ser un fermión, lo podemos describir (junto con su antipartícula) en términos de un campo de Dirac. Sabemos que los quarks u pueden venir en tres colores, r , g y b , por lo que en realidad necesitamos tres campos de Dirac: $\Psi_u = \begin{pmatrix} \psi_u^{(r)} \\ \psi_u^{(g)} \\ \psi_u^{(b)} \end{pmatrix}$. Aquí las componentes están asociadas a los distintos colores, pero cada ψ_u^a es en sí un espinor de Dirac de cuatro componentes.

a) Muestre que el lagrangiano de QCD

$$L_{\text{QCD}} = i\bar{\Psi}_u \left(i\gamma^\mu \partial_\mu 1_{3 \times 3} + \frac{1}{2} g \gamma^\mu W_\mu^a \lambda^a - m_u 1_{3 \times 3} \right) \Psi_u - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu, a}$$

es invariante de gauge ante SU(3). Aquí las identidades de 3×3 están en el espacio de los colores, que no es el mismo de las matrices γ^μ de 4×4 .

- b) Escriba los términos de interacción y dibuje los vértices de la teoría en la notación original de Feynman.
- c) Dibuje nuevamente dichos vértices usando la notación de doble línea y en la base del ítem b) del ejercicio 3. Muestre que el color se conserva en todos los casos.
- d) Dibuje los diagramas que contribuyen al proceso de scattering entre dos quarks u , es decir $u + u \rightarrow u + u$ a orden más bajo no trivial. Haga lo mismo con el scattering entre gluones, $g + g \rightarrow g + g$.
7. (*) **Cargas q vs cargas g .** Explique por qué, a diferencia de lo que sucede con el electromagnetismo, no es posible escribir un lagrangiano con dos campos de materia Φ_1 y Φ_2 con cargas no nulas $g_1 \neq g_2$ respecto una simetría de gauge no abeliana SU(N).
8. **QCD para cuarks u, d y s .** Escriba el lagrangiano de QCD para los tres quarks de menor masa, es decir, los tres primeros sabores. Sea consistente con lo demostrado en el ejercicio anterior.
- a) Dibuje todos los vértices de interacción entre quarks, antiquarks y gluones.
- b) Note que los vértices del ítem anterior son consistentes con la conservación de cada uno de los números netos de partículas de cada tipo, es decir, $N_u - N_{\bar{u}}$, $N_d - N_{\bar{d}}$ y $N_s - N_{\bar{s}}$. Encuentre la transformación global asociada a esta simetría $U(1)_u \times U(1)_d \times U(1)_s$.
- c) Encuentre el subgrupo $U(1)_B$ de esta simetría (o bien la transformación global asociada) que corresponde a la conservación del número bariónico.
9. **Dificultades con el SU(3) de sabor.** Los quarks u y d tienen masas muy similares, pero no puede decirse lo mismo del quark s , que es mucho más masivo. Muestre, como consecuencia de esto, el lagrangiano libre

$$L_{uds} = i\bar{\psi}_u(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_u)\psi_u + i\bar{\psi}_d(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_d)\psi_d + i\bar{\psi}_s(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_s)\psi_s$$

no tiene simetría SU(3) de sabor exacta, que sí se recupera en el límite de masas iguales. Entre otras cosas, esto implica que *gaugear* el SU(3) de sabor como hicimos con el de color.

10. (*) **El SU(3) de sabor como simetría aproximada.** La idea del problema es entender por qué, si bien el L_{uds} del problema anterior no tiene simetría de sabor SU(3) exacta, el análisis de las guías 2 y 3 de la materia resulta tan útil para describir el espectro de nucleones observado.
- a) Identifique la proyección de isospin I_3 y extrañeza S como combinación de los números netos de quarks del problema 8.

- b) Argumente que, como estos últimos se conservan *incluso cuando las masas son distintas*, I_3 y S describen cantidades conservadas en las interacciones fuertes aunque el $SU(3)$ de sabor no es una simetría exacta. (A veces se dice que se conservan *accidentalmente*.)
- c) Pero entonces, ¿qué cantidades conservadas adicionales se obtienen en el límite $m_u = m_d = m_s$, es decir, cuando la simetría $SU(3)$ de sabor es exacta?

11. **Procesos de Scattering.** Considere algún proceso que involucre a hadrones y/o mesones de los octetes y decupletes de la guía 2 y dibuje los diagramas de Feynman que contribuyen al orden más bajo en perturbaciones. Para ello será necesario conocer la composición de quarks de cada hadrón.

Materia en otras representaciones

Hasta ahora tratamos siempre con materia en la representación fundamental del grupo de gauge. Para evitar extrapolaciones incorrectas, veamos brevemente que no es necesario que haya exactamente N campos de materia para poder tener simetría de gauge no abeliana.

12. Considere tres campos de KG reales y de igual masa, descritos por

$$L = \sum_{i=1} \left[\frac{1}{2} \partial^\mu \phi_i \partial_\mu \phi_i - \frac{1}{2} m^2 \phi_i^2 \right].$$

Combine estos campos en un vector $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$ y extienda el lagrangiano para que tenga invariancia ante $SU(2)$ local, usando los generadores $T_{j=1}^a$ asociados a la representación con $j = 1$ de $SU(2)$, es decir, las matrices de rotaciones en el espacio usuales.

Un ejemplo común en la literatura es el que considera lo que se conoce como *adjoint QCD*, es decir, QCD pero con campos de Dirac que viven en la representación adjunta de $SU(N)$. En otras palabras, son quarks con 8 *colores* que se acomodan en una matriz de 3×3 , así como lo hacen los gluones en QCD común y corriente.