Problema 2 - Recuperatorio 2c2025

Considere el circuito de la figura, asumiendo que se encuentra en estado estacionario.

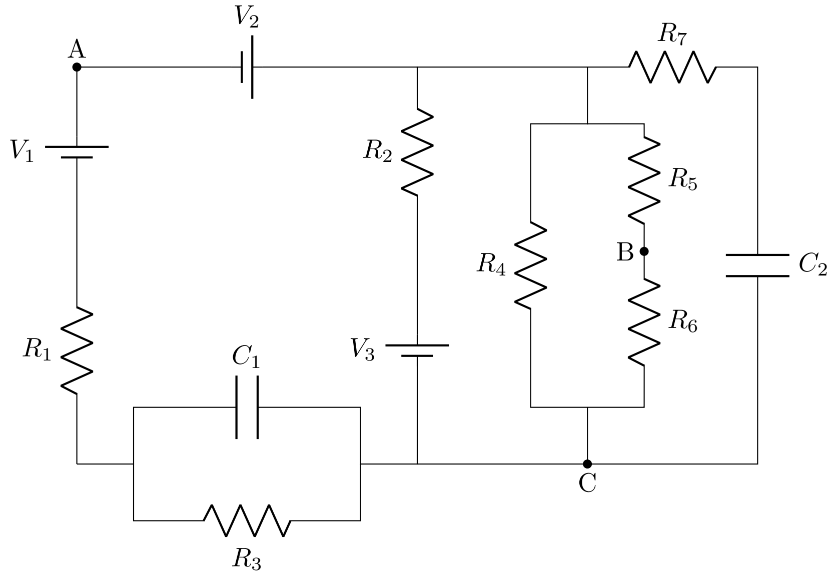
(a) Encontrar las corrientes que circulan a través de cada una de las resistencias e indicar su sentido.

(b) Calcular la diferencia de potencial entre los puntos A y B, y entre los puntos A y C, explicando claramente en cada caso cuál de estos puntos posee mayor potencial.

(c) Calcular la carga almacenada en los dos capacitores. Indicar cuál será la placa cargada positivamente en cada caso.

(d) Calcule la energía almacenada en cada capacitor.

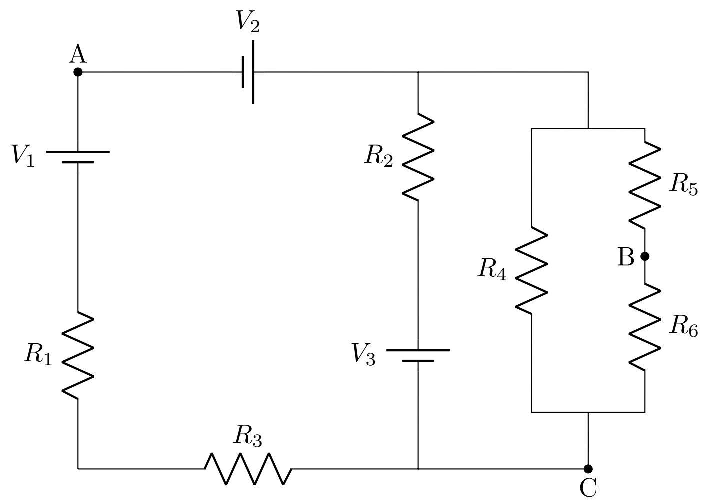
Datos: $V_1 = 30$ V, $V_2 = 10$ V, $V_3 = 24$ V, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 8\ \Omega$, $R_5 = 3\ \Omega$, $R_6 = 5\Omega$, $R_7 = 13\ \Omega$, $C_1 = 7\ \mu$F, $C_2 = 5\ \mu$F.



Resolución

Inciso (a)

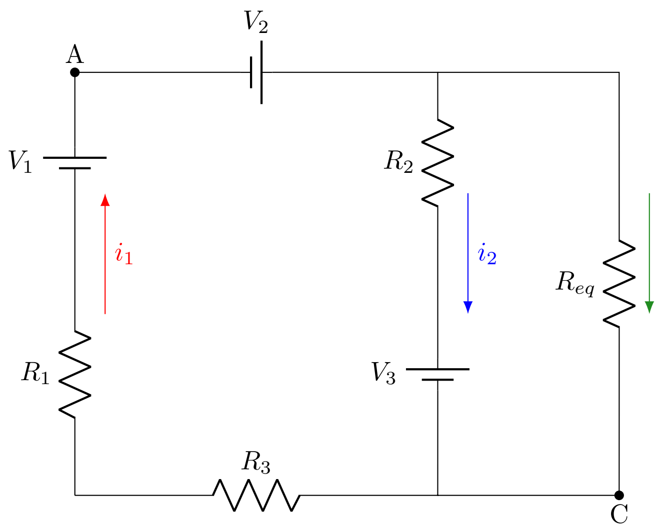
Para empezar a resolver este ejercicio debemos notar que nos indican que el circuito está en estado estacionario, eso significa que los capacitores ya están completamente cargados por tanto no puede circular carga a través de ellos por tanto la corriente en las ramas dónde están los capacitores serán cero. Por este motivo, para este inciso, dónde nos interesan calcular las corrientes vamos a ignorar las ramas dónde tengamos a éstos, y el circuito que nos interesa es



Ahora podemos reemplazar el conjunto de la derecha por un R_{eq} que es de la forma

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5 + R_6} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{8\ \Omega} + \frac{1}{3\ \Omega + 5\ \Omega} \right)^{-1} = 4\ \Omega \tag{0.1}$$

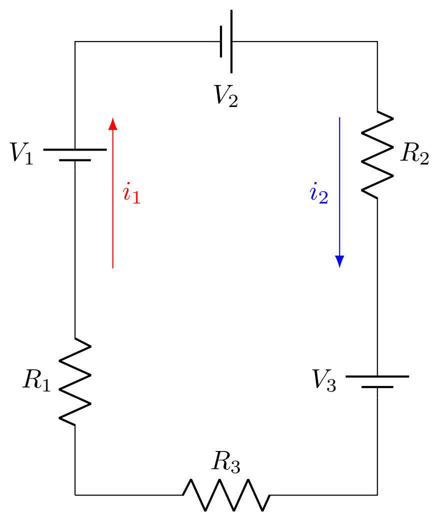
entonces el circuito equivalente nos queda de la forma



A partir del circuito que planteamos podemos ver que la ley de nodos es

$$i_1 = i_2 + i_3 \tag{$\bigstar$}$$

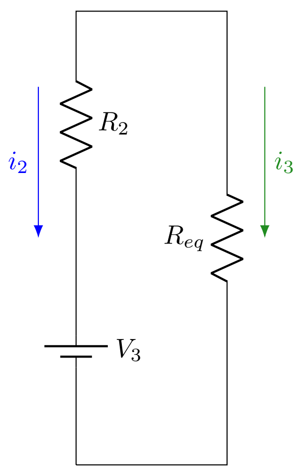
y para la ley de nodos vamos a tomar las siguientes mallas (donde les dejaré que los signos en las resistencias los pongan ustedes pero tendrán las ecuaciones para poder comparar):



Para esta malla, la ley de Kirchhoff, planteando que recorremos la malla desde abajo a la izquierda en sentido antihorario, se escribe como:

$$\begin{aligned} V_{R_3} + V_3 + V_{R_2} - V_2 - V_1 + V_{R_1} &= 0 \\ i_1 \cdot R_3 + V_3 + i_2 \cdot R_2 - V_2 - V_1 + i_1 \cdot R_1 &= 0 \\ i_1 \cdot 3\ \Omega + 24\ \text{V} + i_2 \cdot 2\ \Omega - 10\ \text{V} - 30\ \text{V} + i_1 \cdot 1\ \Omega &= 0 \end{aligned}$$

$$i_1 \cdot 4\ \Omega + i_2 \cdot 2\ \Omega - 16\ \text{V} = 0 \tag{$\spadesuit$}$$



Para esta malla, la ley de Kirchhoff, planteando que recorremos la malla desde abajo a la izquierda en sentido horario, se escribe como:

$$\begin{aligned} V_3 + V_{R_2} + V_{R_{eq}} &= 0 \\ V_3 + i_2 \cdot R_2 - i_3 \cdot R_{eq} &= 0 \end{aligned}$$

$$24\ \text{V} + i_2 \cdot 2\ \Omega - i_3 \cdot 4\ \Omega = 0 \tag{$\clubsuit$}$$

Despejemos de (♠) i_1 en función de i_2 y de (♣) i_3 en función de i_2

$$
\begin{aligned}
-16\ \mathrm{V} + i_2 \cdot 2\ \Omega + i_1 \cdot 4\ \Omega &= 0 \\
i_1 \cdot 4\ \Omega &= 16\ \mathrm{V} - i_2 \cdot 2\ \Omega \\
i_1 &= 4\ \mathrm{A} - \frac{i_2}{2}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
24\ \mathrm{V} + i_2 \cdot 2\ \Omega - i_3 \cdot 4\ \Omega &= 0 \\
i_3 \cdot 4\ \Omega &= 24\ \mathrm{V} + i_2 \cdot 2\ \Omega \\
i_3 &= 6\ \mathrm{A} + \frac{i_2}{2}
\end{aligned}
$$

Finalmente, juntemos todo ésto en la ecuación (★) para obtener el valor de i_2

$$
\begin{aligned}
i_1 &= i_2 + i_3 \\
4\ \mathrm{A} - \frac{i_2}{2} &= i_2 + 6\ \mathrm{A} + \frac{i_2}{2} \\
-2i_2 &= 2\ \mathrm{A} \\
i_2 &= -1\ \mathrm{A}
\end{aligned}
$$

y reemplazando ésto en el resto de ecuaciones tenemos

$$
\begin{cases}
i_1 = 4{,}5\ \mathrm{A} \\
i_2 = -1\ \mathrm{A} \\
i_3 = 5{,}5\ \mathrm{A}
\end{cases} \tag{0.2}
$$

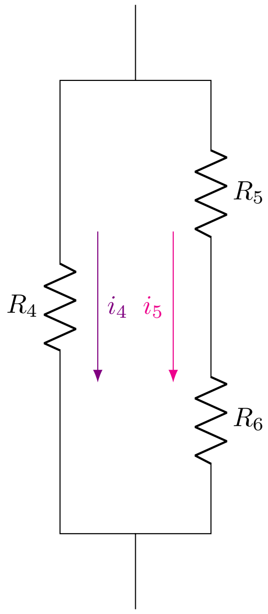
Nos falta ver la corriente que circula por la malla dentro de la resistencia equivalente, que podemos verlo planteando como están en paralelo la caída de tensión en cada rama es la misma y la corriente total es la suma de cada corriente:

$$
\begin{cases}
i_4 + i_5 = i_3 \\
i_4 \cdot R_4 = i_5 \cdot R_5 + i_5 \cdot R_6
\end{cases} \tag{0.3}
$$

$$
\begin{cases}
i_4 + i_5 = 5{,}5 \\
i_4 \cdot 8\ \Omega = i_5 \cdot 3\ \Omega + i_5 \cdot 5\ \Omega
\end{cases} \tag{0.4}
$$

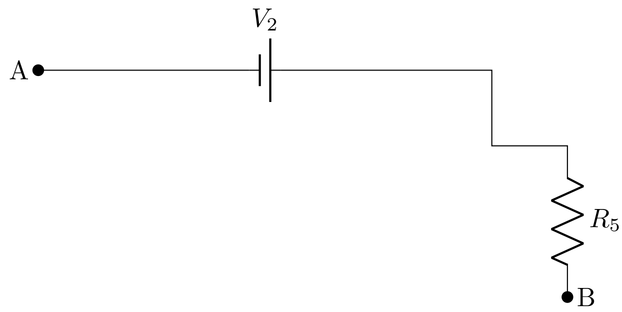
$$
\begin{cases}
i_4 + i_5 = 5{,}5 \\
i_4 \cdot 8\ \Omega = i_5 \cdot 8\ \Omega
\end{cases} \tag{0.5}
$$

podemos ver que la corriente i_4 es igual a la corriente i_5 y valen $i_4 = i_5 = i_3/2 = 2{,}75$ A.



Inciso (b)

Empecemos planteando la caída de tensión entre A y B, para eso recorramos el siguiente camino:

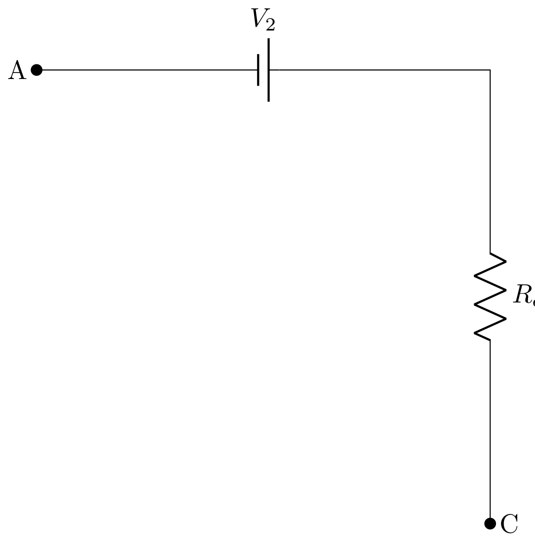


En este camino tenemos que la diferencia de potencial vale:

$$\begin{aligned} \Delta V_{AB} &= V_2 + V_{R_5} \\ &= V_2 - i_5 \cdot R_5 \\ &= 10 \text{ V} - 2{,}75 \text{ A} \cdot 3\ \Omega \\ &= 1{,}75 \text{ V} \end{aligned}$$

Notemos que este valor es positivo, por tanto el punto B está a una tensión mayor que el punto A.

Ahora, planteemos un camino para encontrar la caída de tensión entre el punto A y C:



En este camino tenemos que la diferencia de potencial vale:

$$\begin{aligned} \Delta V_{AC} &= V_2 + V_{R_eq} \\ &= V_2 - i_3 \cdot R_{eq} \\ &= 10 \text{ V} - 5{,}5 \text{ A} \cdot 4\ \Omega \\ &= -12 \text{ V} \end{aligned}$$

Notemos que este valor es negativo, por tanto el punto A está a una tensión mayor que el punto C.

Inciso (c)

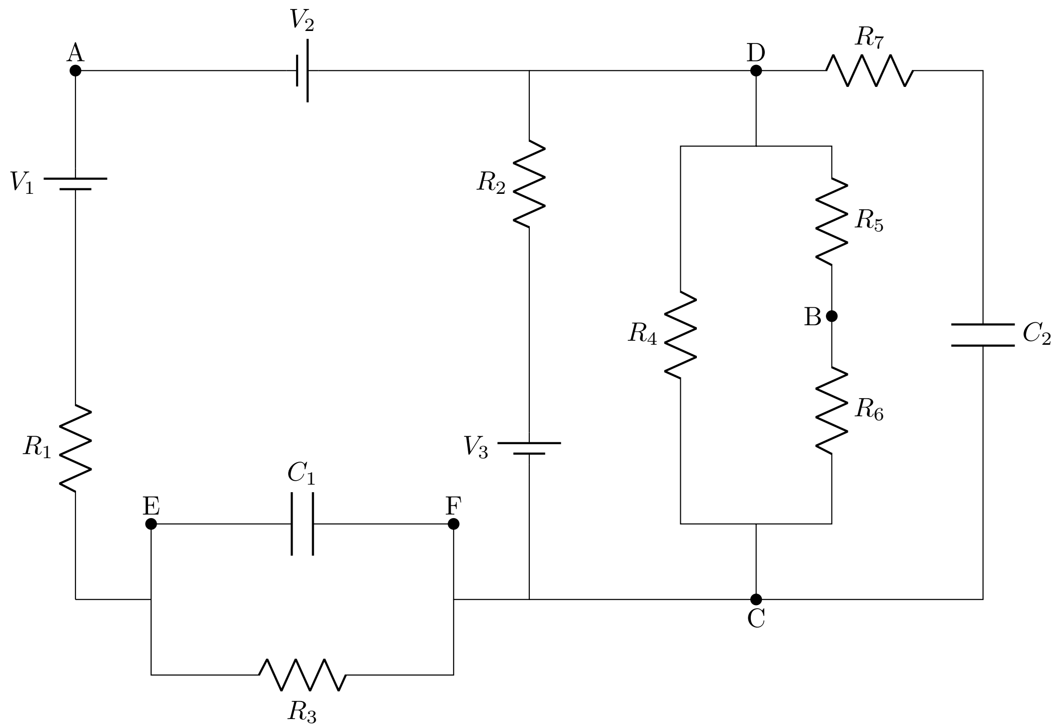
La carga almacenada en el capacitor la podemos calcular a partir de

$$Q = C \cdot V \tag{0.6}$$

dónde V es la caída de tensión entre los bordes del capacitor y en general es dónde uno se equivoca cuando calcula la carga, y C es la capacidad del capacitor que en este ejercicio para ambos capacitores es dato cuánto vale.

Para notar cuáles son los bordes del capacitor dónde tenemos que calcular la diferencia de tensión, marcamos estos puntos en el circuito original (como ahora sí nos interesan ver los capacitores volvemos al circuito que nos dieron al principio) en la figura de abajo, dónde tenemos que notar las siguientes cosas:

- Los puntos E y F están en los bordes del capacitor C_1 que se encuentra en paralelo con la resistencia R_3 por tanto la caída de tensión en estos puntos es igual a la caída de tensión en R_3.
- Los puntos C y D estan en los bordes del capacitor C_2, pero ¿qué pasó con R_7? ¿La ignoramos? Lo que ocurre es que por esas resistencia no circula corriente porque el capacitor está completamente cargado y como no circula corriente entonces no hay caída de tensión ocasionada por esta resistencia, eso nos permite pasar el punto D a dónde lo pusimos y no a la derecha de la resistencia.
- Como los puntos C y D están en paralelo con R_{eq} entonces la caída de tensión en los bordes del capacitor lo podemos calcular como la caída de tensión en R_{eq}.



A partir de todo lo mencionado tenemos que podemos calcular la caída de tensión en el capacitor C_1 como

$$V_{C_1} = V_{R_3} = i_1 \cdot R_3 = 4{,}5 \text{ A} \cdot 3\ \Omega = 13{,}5 \text{ V} \tag{0.7}$$

con ésto podemos calcular la carga almacenada en el capacitor como

$$Q_{C_1} = C_1 \cdot V_{C_1} = 7\ \mu\text{F} \cdot 13{,}5 \text{ V} = 94{,}5\ \mu\text{C} \tag{0.8}$$

lo otro que podemos notar es que el punto F tiene mayor potencial que el punto E que lo podemos ver porque la corriente vimos que circula de derecha a izquierda por R_3. Esto mismo implica que la placa derecha es la positiva y la izquierda es la negativa.

Y para el capacitor C_2 podemos calcular la caída de tensión como

$$V_{C_2} = V_{R_{eq}} = i_3 \cdot R_{eq} = 5{,}5 \text{ A} \cdot 4\ \Omega = 22 \text{ V} \tag{0.9}$$

con ésto podemos calcular la carga almacenada en el capacitor como

$$Q_{C_2} = C_2 \cdot V_{C_2} = 5\ \mu\text{F} \cdot 22 \text{ V} = 110\ \mu\text{C} \tag{0.10}$$

podemos notar que el punto D tiene mayor potencial que el punto C viendo que la corriente circula de arriba hacia abajo en R_{eq}, lo que implica que la placa positiva del capacitor es la que está arriba.

Inciso (d)

En este último inciso nos piden calcular la cantidad de energía almacenada por el capacitor, ésto lo podemos calcular utilizando la siguiente fórmula:

$$U = \frac{1}{2} C V^2 \tag{0.11}$$

Y notemos que las tensiones son las que calculamos en el inciso anterior, entonces es sólo aplicar la fórmula y ver cuánto nos da la energía para cada capacitor

$$U_{C_1} = \frac{1}{2} \cdot 7\ \mu\text{F} \cdot (13{,}5 \text{ V})^2 = 637{,}875\ \mu\text{J} \tag{0.12}$$

$$U_{C_2} = \frac{1}{2} \cdot 5\ \mu\text{F} \cdot (22 \text{ V})^2 = 1210\ \mu\text{J} \tag{0.13}$$

Resumen y pasos a seguir

1) Como el circuito está en estado estacionario, eliminamos los capacitores del circuito.
2) Reducimos el problema buscando si podemos transformar conjuntos de resistencias en un resistencia equivalente.
3) Establecemos las corrientes en el sentido que más nos guste y en base a éstas determinamos los signos de las patas de las resistencias.
4) Definimos las mallas que vamos a recorrer y en qué sentido las queremos recorrer.
5) Planteamos las leyes de Kirchhoff en base a las mallas y sentidos que definimos previamente (tengan cuidado con los signos).
6) Resolvemos el sistema de ecuaciones para obtener el valor de todas las corrientes.
7) Ahora que tenemos las corrientes del circuito sólo nos queda ver qué piden los incisos y resolver en consecuencia, pero ya tenemos la primera parte planteada.

Resuelto por Tomás Ciccarella, cualquier duda, comentario o corrección al respecto es bienvenida, mandar mail a taciccarella@gmail.com.