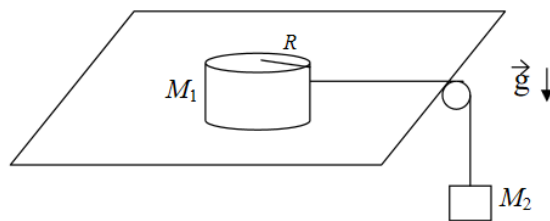


Guía 12: Ejercicio 3.

Un disco cilíndrico homogéneo de radio R y masa M_1 es arrastrado sobre una superficie horizontal sin fricción por una cuerda que está unida a un cuerpo de masa M_2 , como se indica en la figura. Determine:

- (a) La aceleración del centro del disco.
- (b) La aceleración angular del disco.
- (c) La aceleración del cuerpo de masa M_2 .
- (d) La tensión en la cuerda.
- (e) La velocidad del centro de masa del disco cuando se ha desplazado una distancia igual a su diámetro, medida desde la posición en la que estaba en reposo.
- (f) La velocidad de la masa colgante en ese instante.



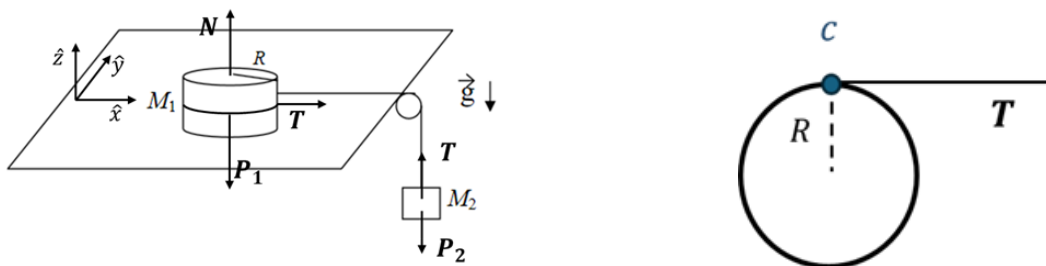
El enunciado de este ejercicio es poco claro. No aclara bien cómo está unida la cuerda al cuerpo M_1 . La versión más simple debería enunciarse (algo) así:

Un disco homogéneo de radio R y masa M_1 es arrastrado sobre una superficie horizontal sin fricción por una cuerda enrollada sobre sí. Del extremo libre cuelga una masa M_2 , como se indica en la figura. Si suponemos que la cuerda se desenrolla sin deslizar respecto al cilindro y que es lo suficientemente larga como para no interrumpir el movimiento, determine: ...

Resolveremos el ejercicio así. El sistema será el cilindro de masa M_1 y radio R , su altura no será necesaria ¹; un cuerpo ² de masa M_2 ; ambos vinculados por una cuerda ideal enrollada alrededor del cilindro.

Los resultados que obtengamos dependerán de que se mantengan estas condiciones. Para esto supondremos que la cuerda es lo suficientemente larga como para permitir la evolución del sistema y poder responder las preguntas del ejercicio. De todas formas esto solo tendrá más peso en los últimos dos ítems en los que supone que el cilindro se desplazó una dada cantidad. Y tampoco lo vamos a usar para nada; solo es una hipótesis para no preocuparnos por otro movimiento que no sea el más sencillo.

Empecemos dibujando el diagrama de cuerpo libre del sistema. Esto lo podemos ver en la siguiente figura.



(a) Diagrama del cuerpo libre y sistema de coordenadas. (b) Cilindro visto desde arriba. Llamaremos c al punto de contacto.

Como comentamos en clase, la idea del cuerpo rígido es reducir su movimiento colectivo (como conjunto de cuerpos puntuales) únicamente al movimiento del centro de masa (también puntual) y a su velocidad angular de rotación. En este sentido, todo cuerpo rígido es aquel cuyos elementos puntuales que lo forman cumplen la condición de rigidez

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Por lo que para describir el movimiento de todo el sistema basta con determinar el movimiento de un solo punto y la velocidad de rotación. Y como ya vimos, esto implica que debemos resolver la posición del centro de masa y $\boldsymbol{\Omega}$. Pero ¿por qué el centro de masa? En principio la condición de rigidez vale para puntos del cuerpo rígido, y por ejemplo un rollo de cocina;

¹Al menos no para este ejercicio. Solo nos interesa su radio pues girará entorno a su eje, y para calcular el momento de inercia solo es interesan las distancias trasversales al eje de giro; es decir R . Si el cilindro girase entorno al eje $\hat{x}$ o $\hat{y}$ entonces sí sería importante saber cuál es su altura.

²Supondremos que este cuerpo es puntual por motivos parecidos al anterior. Si M_2 fuera extenso deberíamos considerar el movimiento de lo que lo compone. Sin embargo, supondremos que en todo el movimiento este cuerpo no rotará, ni tendrá otro movimiento que no sea una traslación rígida del mismo. Es decir que todo M_2 será representado por un punto.

una taza; una banana (arqueada); una dona; una silla; unos auriculares (de los de vincha) y un montón de cosas más tienen el centro de masa fuera del cuerpo. Pero lo importante es considerar un punto que tenga la misma distancia, en todo instante t , al resto de los puntos del cuerpo rígido. Y en particular el centro de masa, del cuerpo rígido, cumple esto³.

Finalmente las ecuaciones de movimiento son

$$M\ddot{\mathbf{r}}_{cm} = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}}^i, \quad I\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \sum (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}) \times \mathbf{F}_{\text{ext}}^i.$$

Las fuerzas que actúan sobre el cilindro son su peso; la normal con la superficie y la tensión. Como siempre, peso y la normal se anulan en la suma. La única que sobrevive en la resultante es la tensión que se aplica en el punto de contacto c como muestra la figura (b). Entonces la ecuación de movimiento para el centro de masa es

$$M_1\ddot{\mathbf{r}}_{cm} = M_1\ddot{x}_{cm}\hat{x} = T\hat{x} \quad \rightarrow \quad \boxed{\ddot{x}_{cm} = \frac{1}{M_1}T},$$

y, como la tensión se aplica sobre el punto c ; en la suma de torques solo aporta el término proporcional a $\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_{cm} = R\hat{y}$. Es decir

$$I\dot{\boldsymbol{\Omega}} = R\hat{y} \times T\hat{x} = -RT\hat{z} \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot{\Omega} = -\frac{R}{I}T}.$$

Vemos que si el cilindro está inicialmente en reposo, se moverá en la dirección de $\hat{x}$ y rotará entorno al eje $\hat{z}$ en sentido horario ($\Omega < 0$).

Para vincularla con la masa M_2 notaremos lo siguiente. No podemos asumir que la longitud de la cuerda entre el punto de contacto y M_2 es constante porque para que pueda girar el cilindro la sog a se debe desenrollar. Sin embargo la condición de inextensibilidad dice que la distancia entre los puntos del hilo (como si fuera rígido a lo largo de su longitud) impone que la velocidad de la sog a es igual (en módulo) en toda su extensión. Entonces si la sog a no desliza respecto al cilindro, en el punto c tanto el cilindro como la sog a tienen la misma velocidad y, por lo anterior comentado, la misma que toda la sog a. Y como M_2 está sujeta a la sog a, su

³El centro de masa está es $\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{\sum_j m_j} \sum m_j \mathbf{r}_j$. Entonces su distancia a un punto del cuerpo rígido $\mathbf{r}_i$ es $|\mathbf{r}_{cm} - \mathbf{r}_i|^2 = |\frac{1}{\sum_j m_j} \sum m_j \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2 = \frac{1}{|\sum_j m_j|^2} |\sum_j m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)|^2$. Si derivamos respecto a t , es $\frac{d|\mathbf{r}_{cm} - \mathbf{r}_i|^2}{dt} = \frac{2}{|\sum_j m_j|^2} (\sum_j m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)) \cdot \sum_j m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) = \frac{2}{|\sum_j m_j|^2} (\sum_j m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)) \cdot \sum_j m_j \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$, usando la condición de rigidez. Y como $\boldsymbol{\Omega}$ es una cantidad asociada al cuerpo rígido, debe ser el mismo para todos los puntos y por lo tanto $\frac{d|\mathbf{r}_{cm} - \mathbf{r}_i|^2}{dt} = \frac{2}{|\sum_j m_j|^2} \left(\sum_j m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \right) \cdot \left(\boldsymbol{\Omega} \times \sum_j m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \right)$. Sabemos que el producto vectorial da un vector ortogonal, esta derivada se anula y por lo tanto la distancia entre el centro de masa y cualquier punto del cuerpo rígido es siempre la misma.

velocidad coincide con la de esta. En resumen, al no deslizar la sog a podemos decir que

$$v_c = v_{\text{soga}} = -\dot{z}.$$

con v_c la velocidad del punto de contacto (en módulo) y $\dot{z}$ la velocidad de M_2 (en la única dirección que se puede mover, que es z). El signo menos está para indicar que si M_2 cae, es decir $\dot{z} < 0$, c debe avanzar, es decir $v_c > 0$. Es decir que tanto M_2 , como la sog a y c se mueven a la misma velocidad; y por lo tanto con la misma aceleración.

El punto de contacto, al ser parte del cilindro, cumple la condición de rigidez

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_{cm} + \Omega \hat{z} \times R \hat{y} = v_{cm} \hat{x} - R\Omega \hat{x} \rightarrow v_c = \dot{x}_{cm} - R\Omega = -\dot{z}.$$

Derivando podemos obtener una ecuación de vínculo entre todos los grados de libertad

$$\ddot{x}_{cm} - R\dot{\Omega} = -\ddot{z}.$$

Como estamos considerando M_2 como un cuerpo puntual, es fácil obtener su ecuación de movimiento. Este resultado ya lo deberíamos saber u obtener fácilmente como

$$M_2 \ddot{z} = T - M_2 g \quad \rightarrow \quad \boxed{\ddot{z} = \frac{1}{M_2} T - g}.$$

Finalmente, reemplazando cada ecuación recuadrada en la ecuación de vínculo obtenemos

$$\frac{1}{M_1} T + \frac{R^2}{I} T = g - \frac{1}{M_2} T \quad \rightarrow \quad T = \frac{g}{\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} + \frac{R^2}{I}}.$$

De esta forma respondemos el ítem (d), y con esto el resto de aceleraciones:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{cm} &= \frac{1}{M_1} \frac{g}{\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} + \frac{R^2}{I}}, \\ \dot{\Omega} &= -\frac{R}{I} \frac{g}{\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} + \frac{R^2}{I}}, \\ \ddot{z} &= \frac{1}{M_2} \frac{g}{\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} + \frac{R^2}{I}} - g. \end{aligned}$$

Dado que estas cantidades es constantes, resolver la evolución del sistema es sencillo; es un problema de cinemática. Eso queda como ejercicio para el lector.