

## Problema 10.6: sistema de dos masas, una girando y otra colgando

Este problema es central porque combina conceptos de conservación de momento lineal, momento angular y energía. Además demuestra cómo a partir de analizar la energía del problema se pueden hacer deducciones sobre su dinámica.

### 1. Inciso (a)

El primer inciso pide encontrar la posición para la que la masa  $m_2$  permanece en reposo usando las ecuaciones de Newton. Lo primero que hacemos es definir un sistema de referencia. Es conveniente elegir como origen de coordenadas el orificio de la mesa (Figura 1.a). Para la masa  $m_2$  usaremos coordenadas polares  $(r, \theta)$  (Figura 1.b). Notemos que el movimiento de  $m_2$  estará restringido en el eje  $z$ . Por eso voy a usar  $(r_1, \theta_1) \equiv (r, \theta)$  para las coordenadas de  $m_1$  y  $z_2 \equiv z$  para la de  $m_2$ .

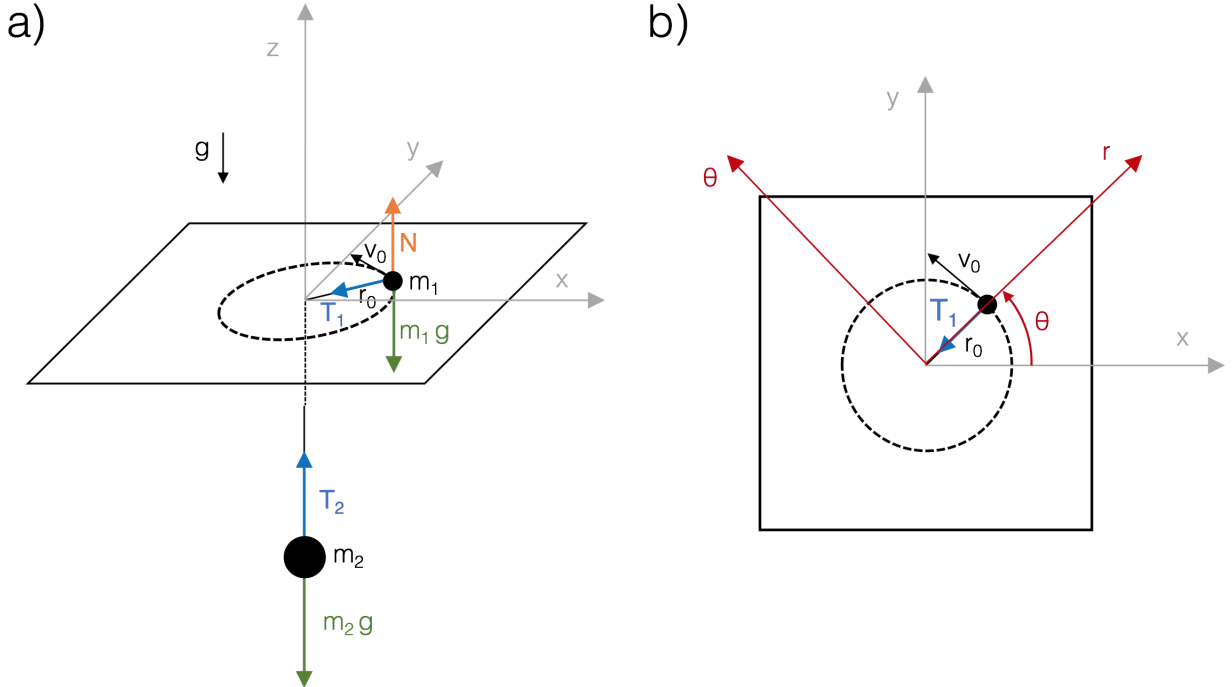


Figura 1: Esquema del problema, sistemas de referencia y diagramas de fuerzas.

¿Cuáles son los vínculos de este problema? La masa  $m_1$  no va a tener movimiento en  $z$  (está soportada por la mesa) y además las masas están unidas por una cuerda inextensible. Luego, en el sistema de coordenadas elegido, podemos plantear  $l_{\text{cuerda}} = r - z = \text{cte}$ . Nótese que  $z$  tomará siempre

valores negativos. De esta condición se deduce que  $\dot{r} = \dot{z}$  y  $\ddot{r} = \ddot{z}$ . Notemos que un sistema cuyo movimiento parecía a primera vista muy complejo de describir se reduce a solamente dos coordenadas, ya que  $z$  quedará completamente definida si sabemos  $r$  y viceversa.

Los esquemas de fuerzas se esquematizan en la Figura 1, a partir del análisis sobre cada una de las masas podemos escribir las ecuaciones de Newton para la masa  $m_1$ :

$$\hat{z}) - m_1 g + N = 0 \quad (1a)$$

$$\hat{r}) m_1 (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T \quad (1b)$$

$$\hat{\theta}) m_1 (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \quad (1c)$$

y para la masa  $m_2$ :

$$\hat{x}) \text{ No hay fuerzas} \quad (2a)$$

$$\hat{y}) \text{ No hay fuerzas} \quad (2b)$$

$$\hat{z}) m_2 \ddot{z} = -m_2 g + T \quad (2c)$$

Es importante notar la diferencia en la ecuación en  $\hat{z}$  y la ecuación en  $\hat{\theta}$  para la masa  $m_1$ : en la primera las fuerzas se equilibran y no hay movimiento, en la segunda no hay fuerzas acutando en la dirección  $\hat{\theta}$  pero eso ¡No quiere decir que no haya movimiento en esa dirección!

Busquemos ahora lo que nos pide el problema. Reposo de  $m_2$  es equivalente a  $\ddot{z} = 0$  y  $\dot{z} = 0$  que es equivalente por el vínculo a  $\ddot{r} = 0$  y  $\dot{r} = 0$  y por ende que la masa  $m_1$  se mantenga en  $r_0$ , luego tenemos

$$\hat{r}) - m_1 r_0 \dot{\theta}^2 = -T \quad (3a)$$

$$\hat{\theta}) m_1 r \ddot{\theta} = 0 \quad (3b)$$

y para  $m_2$

$$\hat{z}) 0 = -m_2 g + T \quad (4)$$

De (3b) vemos que  $\dot{\theta} = cte \equiv \dot{\theta}_0$  y combinando (3a) con (4) obtenemos

$$\dot{\theta}_0^2 = \frac{m_2}{m_1} \frac{g}{r_0} \quad (5)$$

Para escribir la relación en término de los datos del problema recordemos la relación entre velocidad tangencial y velocidad angular  $v_0 = r_0 \dot{\theta}_0$ , luego reemplazando y despejando obtenemos

$$\boxed{v_0^2 = g r_0 \frac{m_2}{m_1}} \quad (6)$$

que es la relación de parámetros para que  $m_2$  quede en reposo (lo que pedía el enunciado) y  $m_1$  quede girando con radio constante y a velocidad angular constante.

## 2. Inciso (b)

Vamos a evaluar si se conservan el impulso lineal total que llamaremos  $\vec{P}$ , el impulso angular total  $\vec{L}$  y la energía mecánica total del sistema que denotaremos  $E_{mec\ total} \equiv H$ <sup>1</sup>. Vamos a empezar por analizar qué pasa con el momento lineal total.  $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$  y lo que tenemos que analizar es qué pasa con su derivada respecto del tiempo  $\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt}$ . Es inmediato ver que  $\frac{d\vec{p}_1}{dt} \neq 0$  ya que la masa  $m_1$  está girando, con lo cual su momento lineal cambia (por lo menos) de dirección en cada instante, además el vector  $\vec{p}_1$  está siempre contenido en el plano  $(x, y)$  luego su derivada también lo estará. Por otro lado  $\frac{d\vec{p}_2}{dt}$  podría ser nula pero en ese caso estamos en la situación del inciso **a)** donde  $\frac{d\vec{p}_1}{dt} \neq 0$  y luego  $\frac{d\vec{P}}{dt} \neq 0$ , por otro lado si  $\frac{d\vec{p}_2}{dt} \neq 0$  y la masa  $m_2$  está en movimiento, nunca puede darse que  $\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$  ya que son vectores en distintos planos. Luego  $\vec{P}$  **no se conserva**. Les dejo a ustedes justificarlo a partir de la suma de fuerzas externas actuando sobre el sistema.

Veamos qué pasa con  $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ . Primero podemos notar que el momento angular de la masa  $m_2$  es *siempre* nulo.

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = (z\hat{z}) \times (m_2 v_z)\hat{z} = 0 \quad (7)$$

Luego la única masa que contribuye al momento angular es  $m_1$

$$\vec{L} = \vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 \quad (8)$$

Veamos si se conserva o no. Recordemos que la derivada temporal del impulso angular es la suma de los torques sobre el sistema (en este caso sobre la masa  $m_1$  porque  $m_2$  no contribuye a  $\vec{L}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i = \vec{r}_1 \times \sum_i \vec{F}_i^1 = \vec{r}_1 \times (m_1 \vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1) = r\hat{r} \times (0 - T\hat{r}) = 0 \quad (9)$$

Donde usé que el peso de  $m_1$  y la normal se anulan y que la tensión que hace la cuerda está en  $\hat{r}$ , entonces concluimos que  $\vec{L}$  **se conserva**.

---

<sup>1</sup>¿Por qué la llamamos  $H$ ? En honor al señor William Hamilton



Veamos finalmente la energía mecánica  $H$ . Recordemos que la variación de la energía mecánica es igual al trabajo de las fuerzas no conservativas sobre el sistema.

$$\Delta H = W_{nc} \quad (10)$$

¿Cuáles son las fuerzas no conservativas en nuestro problema? Son  $\vec{N}$ ,  $\vec{T}_1$  y  $\vec{T}_2$ . Denotemos el diferencial de desplazamiento de la masa  $m_1$  como

$$d\vec{r}_1 = r d\theta \hat{\theta} + dr \hat{r} \quad (11)$$

donde usé el diferencial de un arco de circunferencia en  $\hat{\theta}$ . El de la masa  $m_2$  es

$$d\vec{r}_2 = dz \hat{z} \quad (12)$$

Luego es inmediato ver que la normal  $\vec{N}$  va a ser perpendicular a  $d\vec{r}_1$  y luego no realiza trabajo. Por otro lado  $T_1$  está en  $\hat{r}$  luego su producto escalar con la componente en  $\hat{\theta}$  de  $d\vec{r}_1$  va a dar 0. Calculemos  $W_{nc}$  entre dos puntos cualquiera A y B

$$\Delta H = W_{nc} = \int_A^B \vec{T}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_A^B \vec{T}_2 \cdot d\vec{r}_2 \quad (13)$$

Usando (11) y (12) resulta

$$\Delta H = W_{nc} = \int_A^B -T\hat{r} \cdot (r d\theta \hat{\theta} + dr \hat{r}) + \int_A^B T\hat{z} \cdot (dz \hat{z}) = \int_A^B -T dr + \int_A^B T dz \quad (14)$$

Pero recordemos que por nuestro vínculo  $dr = dz$ , luego

$$\Delta H = W_{nc} = \int_A^B -T dr + \int_A^B T dr = 0 \quad (15)$$

y concluimos que  $H$  se conserva.

### 3. Inciso (c)

El inciso (a) se podía considerar un problema de dinámica estilo Guía 2 y el inciso (b) fueron consideraciones sobre magnitudes conservadas (o no) del sistema. Recién en este inciso se va a ver el poder analítico que tienen los teoremas de conservación. Les planteo como ejercicio que intenten resolver este inciso sin usar conservación del momento angular ni conservación de la energía. Después me cuentan.

La idea general sería encontrar ecuaciones a partir de igualar magnitudes conservadas a  $t = 0$  (instante en el que conocemos sus expresiones en función de los parámetros del problema) y a un

cierto  $t \neq 0$  (instante que nos interesa, por ejemplo cuando la masa  $m_2$  bajó  $d$ ). Veamos primero el momento angular  $\vec{L}$ . En  $t = 0$ , el momento angular vale

$$\vec{L}^{(0)} = m_1 \vec{r}_1^{(0)} \times \vec{v}_1^{(0)} = m_1 r_0 \hat{r} \times v_0 \hat{\theta} = m_1 r_0 v_0 \hat{z} \quad (16)$$

Donde con el supraíndice (0) denoto el momento angular inicial y con el subíndice la masa 1 o 2. En el instante en el que la partícula  $m_2$  bajó  $d$  tenemos

$$\vec{r}_1 = (r_0 - d) \hat{r} \quad (17a)$$

$$\vec{v}_1 = v_{1r} \hat{r} + v_{1\theta} \hat{\theta} \quad (17b)$$

donde usé el vínculo para escribir  $\vec{r}_1$  y expresé  $\vec{v}_1$  de la manera más general posible ya que ahora podría haber una componente radial de la velocidad. Veamos el momento angular (recordemos que la masa  $m_2$  no contribuye):

$$\vec{L} = m_1 (r_0 - d) \hat{r} \times (v_{1r} \hat{r} + v_{1\theta} \hat{\theta}) = m_1 (r_0 - d) v_{1\theta} \hat{z} \quad (18)$$

donde simplemente usamos la definición de momento angular, ahora por conservación podemos igualar (16) y (18) y despejar

$$\boxed{v_{1\theta} = v_0 \left( \frac{r_0}{r_0 - d} \right)} \quad (19)$$

que es la mitad de la respuesta a este inciso. Ahora nos queda encontrar  $v_{1r}$ , para eso usaremos la conservación de la energía mecánica. Vamos a llamar  $T$  a la energía cinética y  $V$  a la energía potencial, los subíndices 1 y 2 indicaran las energías de las masas correspondientes. La variación de energía mecánica la analizaremos convenientemente entre el estado del sistema a  $t = 0$  y en el momento que la masa bajó una distancia  $d$

$$\Delta H = \Delta(T + V) = \Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta V_1 + \Delta V_2 = 0 \quad (20)$$

Por supuesto cuando hablamos de energía potencial nos referimos en este caso a la potencial gravitatoria ya que la única fuerza conservativa de este problema es la de gravedad. Escribamos cada uno de los  $\Delta$

$$\Delta T_1 = \frac{1}{2} m_1 (v_{1\theta}^2 + v_{1r}^2) - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \quad (21a)$$

$$\Delta T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2z}^2 - 0 \quad (21b)$$

$$\Delta V_1 = 0 \quad (21c)$$

$$\Delta V_2 = -m_2 g d \quad (21d)$$

luego de la ecuación (20) se obtiene

$$0 = \frac{1}{2}m_1 (v_{1\theta}^2 + v_{1r}^2) - \frac{1}{2}m_1 v_0^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2z}^2 - m_2 g d \quad (22)$$

Pero recordemos de nuevo que por vínculo  $v_{1r} = v_{2z}$  (es lo mismo que  $\dot{r} = \dot{z}$  escrito con otra notación), luego

$$0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{1r}^2 = m_2 g d + \frac{1}{2}m_1 v_0^2 - \frac{1}{2}m_1 v_{1\theta}^2 \quad (23)$$

y se puede despejar

$$v_{1r} = \pm \left( \frac{2m_2 g d + m_1 [v_0^2 - v_{1\theta}^2]}{m_1 + m_2} \right)^2 \quad (24)$$

donde recordemos que  $v_{1\theta}$  no es una incógnita porque ya lo encontramos antes. Queda la pregunta: ¿Tomo la dirección positiva o negativa de la velocidad radial? Es interesante notar que el análisis a partir de la conservación de la energía y el momento angular que estamos haciendo **no nos permite deducir el signo de la velocidad**, para eso necesitamos alguna información extra. El dato está en el enunciado porque dice 'cuando la masa  $m_2$  ha bajado una distancia  $d$ ', luego se deduce que el sentido de la velocidad es negativo. Sin embargo si el enunciado nos dijera que la masa  $m_2$  bajó y volvió a subir hasta esta posición, en ese caso el signo correcto sería el positivo. La conclusión es que el análisis de conservaciones nos da información completa sobre  $v_{1\theta}$  con signo pero sólo nos da información de  $|v_{1r}|$ , el signo hay que deducirlo de alguna otra manera.

La respuesta completa será entonces escribir  $\vec{v}_1 = v_{1r}\hat{r} + v_{1\theta}\hat{\theta}$  con sus componentes ahora conocidas en función de los parámetros del problema. Finalmente nos piden encontrar el ángulo  $\alpha$  que forma  $\vec{v}_1$  con el hilo, este no es más que

$$\alpha = \arctan \frac{v_{1\theta}}{v_{1r}} \quad (25)$$

como se esquematiza en la Figura 2.

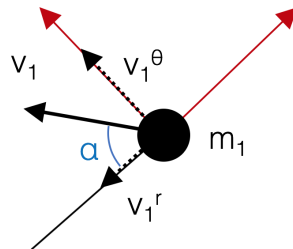


Figura 2: Ángulo  $\alpha$  que forma  $\vec{v}_1$  con el hilo.

## 4. Inciso (d)

Este inciso pide básicamente resolver lo mismo que el inciso (a) pero a partir de un **análisis de la(s) energía(s)** del problema, sin pasar por las ecuaciones de Newton explícitamente. Como discutiremos más adelante esto tiene implicaciones muy profundas y son la base para el desarrollo de los marcos teóricos de la Mecánica *Lagrangiana* y *Hamiltoniana* que se estudian más adelante en la carrera.

Escribamos la expresión general para  $H$  partiendo de lo calculado en (22). Para esto defino un 0 para la energía potencial de  $m_2$ , lo elijo en  $r = 0$  tal que  $V_2(0) = 0$ <sup>2</sup> pero podría elegirlo en cualquier otra posición, recordemos que el sentido físico es el de las **diferencias de energía potencial**.

$$H = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{\theta}^2r^2 + m_2gr \quad (26)$$

Notemos que escrita así es una función  $H = H(r, \dot{r}, \dot{\theta})$  Pero ahora notemos que el momento angular (que es constante por conservación) es

$$\vec{L} = m_1 \left[ r\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) \right] = m_1r^2\dot{\theta}\hat{z} \quad (27)$$

y luego, como  $L^2 = (m_1r^2\dot{\theta})^2$ , notemos que entonces el segundo término de (26) resulta

$$\frac{1}{2}m_1\dot{\theta}^2r^2 = \frac{L^2}{2m_1r^2} \quad (28)$$

con lo que podemos escribir la energía mecánica como

$$H = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m_1r^2} + m_2gr \quad (29)$$

fíjense que ahora obtuvimos de manera explícita que la energía mecánica no depende de  $\dot{\theta}$ , luego tenemos una expresión  $H = H(r, \dot{r})$ . Esto reduce el problema de manera **efectiva** a la dinámica de un sistema 1D en  $r$ . Notemos que para cada  $r$  vamos a tener determinado  $\dot{\theta}$  por la siguiente ecuación

$$\dot{\theta}(r) = \frac{L}{m_1r^2} \quad (30)$$

donde no olviden que  $r = r(t)$ . Ahora **por comodidad** y porque la analogía es muy poderosa y pedagógica vamos a llamar  $V_{eff}(r) \equiv \frac{L^2}{2m_1r^2} + m_2gr$

$$H = \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2}_T + \underbrace{\frac{L^2}{2m_1r^2} + m_2gr}_{V_{eff}(r)} \quad (31)$$

---

<sup>2</sup>La coordenada  $r = 0$  tal que  $V_2(r = 0) = 0$  corresponde a  $z = -L_{cuerda}$  y a  $V_2(z = -L_{cuerda}) = 0$  por el vínculo. Me conviene escribir  $V_2(r)$  en vez de  $V_2(z)$  para sacarme de encima una variable.

Fíjense que ahora tenemos un problema equivalente  $1D$  con una energía cinética  $T$  en el primer término <sup>3</sup> y un potencial  $V_{eff}(r)$ . Una manera de pensarlo es interpretar el término que contiene al momento angular,  $\frac{L^2}{2m_1 r^2}$ , como una energía potencial en el sistema de referencia fijo a la masa  $m_1$  (en el que la masa  $m_1$  no gira).

Analicemos ahora el problema en términos de  $H$ ,  $T$  y  $V_{eff}$ . En la Figura 3 se grafican  $V_{eff}(r)$  y la energía mecánica total  $H$  que es una constante. Dado que  $H = T + V_{eff}$ , para cada posición  $r$  en el gráfico, la energía cinética resulta  $T = H - V_{eff}$ . Y como  $T \geq 0$  queda inmediatamente definida una **región posible** del movimiento que es donde se cumple  $T = H - V_{eff} \geq 0$  o lo que es lo mismo, la inecuación

$$V_{eff}(r) \leq H \quad (32)$$

define un  $r_{min}$  y un  $r_{max}$  tales que los  $r$  posibles del movimiento serán  $r \in [r_{min}, r_{max}]$  (Figura 3).

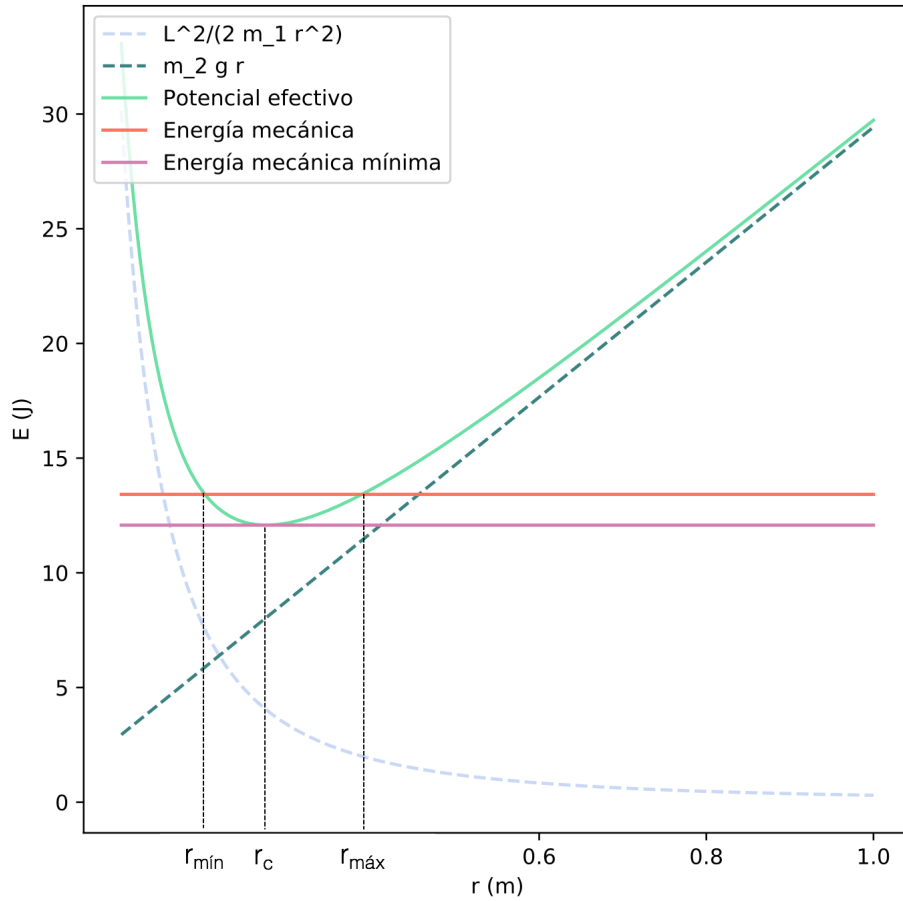


Figura 3: Gráfico de  $V_{eff}(r)$  y  $H$ .

Se puede ver además que habrá un para el cual, si la energía total cumple  $H = V_{eff}(r_c)$  entonces la energía cinética valdrá  $T = 0 \forall t$ ,  $r_c = r_{min} = r_{max}$  y  $H$  será la mínima posible  $H = H_{min}$  ya que una  $H$  menor implicaría energía cinética negativa. Ese punto  $r_c$  es entonces el del *reposo en*  $r$

<sup>3</sup>distinta de la del inciso (c), esta sería una energía cinética radial



que implicará reposo de la masa  $m_2$  y que, mirando la ecuación (30) implicará velocidad angular constante para  $m_1$ , o sea un movimiento circular uniforme.

Por otro lado, si se analiza  $V_{eff}(r)$  se ve que el punto  $r_c = r_{min} = r_{max}$  tal que  $H = V_{eff}(r_c)$  es el mínimo de la función  $V_{eff}(r)$ . Luego lo buscamos como ya sabemos de análisis

$$\left. \frac{\partial V_{eff}(r)}{\partial r} \right|_{r_c} = -\frac{2L^2}{2m_1 r_c^3} + m_2 g = 0 \quad (33)$$

ahora, volviendo a nuestro problema y recordando que  $L^2 = (m_1 v_0 r_0)^2$  obtenemos

$$-\frac{m_1^2 v_0^2 r_0^2}{m_1 r_0^3} = -m_2 g \quad (34)$$

donde usé  $r_c = r_0$  porque en el problema nos dicen que  $m_2$  *se queda* en reposo, luego la posición inicial  $r_0$  *tiene que ser*  $r_0 = r_c$ . Finalmente se despeja

$$\boxed{v_0^2 = g r_0 \frac{m_2}{m_1}} \quad (35)$$

que es el resultado del inciso (a). Llegamos al mismo resultado analizando solamente la expresión de  $H = T + V$  del sistema (teniendo en cuenta los vínculos) y la conservación de  $H$  y de  $\vec{L}$ .

## 5. Inciso (e)

En este inciso nos están pidiendo que analicemos qué pasa en la situación en la que  $H$  es sólo un poco más grande que  $V_{eff}(r_c)$ , o sea nos vamos a restringir a analizar  $V_{eff}(r)$  cerca de su valor mínimo, que ya vimos que se da en  $r_c$ . El mínimo de un potencial es un **punto de equilibrio**<sup>4</sup> y si la concavidad del potencial es hacia arriba (tipo una parábola) el equilibrio es estable. Noten que esto es absolutamente consistente con lo que vimos en la Guía 4, les dejo a ustedes que analicen por ejemplo el apunte de Vale teniendo en cuenta la definición de potencial  $F = -\frac{dV(x)}{dx}$  donde  $F$  es una fuerza conservativa. Van a poder deducir todo el análisis de estabilidad, etc pero en términos de un potencial.

Cerca de su mínimo, el potencial  $V_{eff}(r)$  se puede aproximar por una parábola (Taylor de orden 2) y, si el equilibrio es estable, se puede hacer un análisis de *pequeñas oscilaciones* alrededor del punto de equilibrio  $r_c$ . Si  $H \gg V_{eff}(r_c)$  las masas se apartan considerablemente de la posición de equilibrio (1 y 2 en  $r$  y en  $z$  respectivamente) y la aproximación deja de valer. Veamos:

$$V_{eff}(r) \approx V_{eff}(r_c) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V_{eff}(r)}{\partial r^2} \right|_{r_c} (r - r_c)^2 \quad (36)$$

---

<sup>4</sup>Equilíbrio en  $r$  para  $m_1$  y en  $z$  para  $m_2$ , ¡En  $\theta$   $m_1$  sigue girando!

donde me puedo tomar la libertad de redefinir el cero del potencial y tomar  $V_{eff}(r_c) = 0$ , ¡Recuerden que la elección del cero había sido arbitraria y lo que tiene sentido físico es la diferencia de potencial (o derivada tomando límite)!

Luego puedo reescribir mi energía mecánica total dada por (31) como

$$H = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V_{eff}(r)}{\partial r} \right|_{r_c} (r - r_c)^2 \quad (37)$$

pero ¡Momento! Veamos qué pasa si defino

$$H = \frac{1}{2} \underbrace{(m_1 + m_2)}_m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\left. \frac{\partial^2 V_{eff}(r)}{\partial r} \right|_{r_c}}_k (r - r_c)^2 \quad (38)$$

¡Tengo la ecuación de la energía de un **oscilador armónico** de constante restitutiva  $k$  y masa  $m$ ! Si la energía tiene exactamente una expresión equivalente entonces la dinámica tiene que ser equivalente y el sistema se va a comportar para  $r(t)$  como un oscilador armónico.<sup>5</sup>

Por si queda alguna duda, miremos la ecuación que nos queda

$$H(r, \dot{r}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}k(r - r_c)^2 \quad (39)$$

y derivémosla respecto del tiempo (acá se evidencia la importancia de diferenciar entre derivada total y derivada parcial) ya que  $r = r(t)$  y  $\dot{r} = \dot{r}(t)$  y usemos la conservación de la energía  $\frac{dH}{dt} = 0$

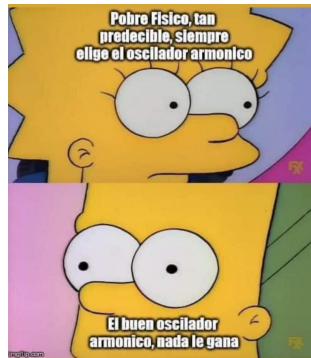
$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial H}{\partial \dot{r}}\ddot{r} = k(r - r_c)\dot{r} + m\dot{r}\ddot{r} = \dot{r} \underbrace{[k(r - r_c) + m\ddot{r}]}_{=0} = 0 \quad (40)$$

pero eso tiene que valer para todo  $t$  y  $\dot{r}$  es obviamente no nula para todo  $t$  en el caso general, entonces

$$m\ddot{r} = -k(r - r_c) \quad (41)$$

---

<sup>5</sup>El oscilador armónico es un modelo muy poderoso porque sirve para estudiar cualquier sistema (ya verán que no sólo mecánico) cerca de su mínimo de **potencial**, real o efectivo.



que es la ecuación de Newton para un oscilador armónico (por ejemplo una masa  $m$  acoplada a un resorte de constante elástica  $k$ ). ¿Me estás queriendo decir que a partir de escribir la expresión de  $H$  y plantear conservación de la energía, *dedujimos* la ecuación de Newton? El Universo es muy confuso realmente y la Mecánica muy bella.

Pero volvamos al problema, espero haberlos convencido de que como escribimos la energía del problema como la de un oscilador armónico entonces vamos a modelar el sistema como tal y vamos a poder usar, por analogía, todo lo que sabemos sobre las soluciones de la ecuación diferencial del oscilador. El movimiento va a estar dado entonces por

$$r(t) = r_c + \delta r \sin(\omega_r t + \phi) \quad (42)$$

donde  $\delta r$  no es más que una amplitud que la llamamos así para resaltar que es pequeña y para  $m_2$  tenemos algo completamente análogo en  $z$  por el vínculo:

$$z(t) = z_c + \delta r \sin(\omega_r t + \phi) \quad (43)$$

donde  $z_c$  es la posición de equilibrio en  $z$  que corresponde a cuando  $m_1$  está en  $r_c$ . Nótese que  $\omega_r = \omega_z$  y  $\delta r = \delta z$ . Por otro lado también sabemos que la frecuencia de la oscilación va a ser  $\omega_r = \frac{k}{m}$ . Calculemos explícitamente  $k$

$$k = \left. \frac{\partial^2 V_{eff}(r)}{\partial r^2} \right|_{r_c} = \frac{3L^2}{m_1 r_c^4} = \frac{3m_1 v_0^2}{r_0^2} \quad (44)$$

luego, usando  $L^2 = (m_1 v_0 r_0)^2 \approx (m_1 v_0 r_c)^2$  y  $m = m_1 + m_2$

$$\boxed{\omega_r = \frac{k}{m} = \sqrt{\frac{3m_1}{m_1 + m_2}} \frac{v_0}{r_0}} \quad (45)$$

Por otro lado, ¿Cuál será la velocidad angular de  $m_1$ ? Veamos la ecuación (30) en la aproximación de pequeñas oscilaciones, vamos a asumir  $r(t)^2 \approx r_0^2 \approx r_c^2$ . Notemos la sutileza de que  $r_0$  en términos *cualitativos* es bien distinto de  $r_c$  ya que  $r_0$  será un extremo del movimiento ( $r_{min}$  o  $r_{max}$  dependiendo del signo de  $v_0$ ) porque en  $r_0$  la velocidad en  $r$  vale  $\dot{r} = 0$ . En términos *cuantitativos* es que los vamos a aproximar como equivalentes.

$$\dot{\theta} \approx \frac{L}{m_1 r_c^2} = \frac{v_0}{r_0} = cte \equiv \omega_\theta \quad (46)$$

luego

$$\boxed{\omega_\theta = \frac{v_0}{r_0}} \quad (47)$$

y entonces obtenemos la relación

$$\omega_r = \sqrt{\frac{3m_1}{m_1 + m_2}} \omega_\theta \quad (48)$$

Vale la pena notar que en el límite  $m_2 \gg m_1$  se cumple  $\omega_\theta \gg \omega_r$  con lo cual la modulación en  $r$  del movimiento será lenta (el sistema gira mucho más rápido de lo que cumple una oscilación en  $r$ ), uno podría pensar que para  $m_2 \ll m_1$  veríamos oscilaciones muy rápidas en  $r$  dentro de una misma vuelta pero no, lo que vemos es que hay un límite que es  $\omega_r = \sqrt{3} \omega_\theta$  o sea menos de un factor 2, con lo cual la oscilación en  $r$  nunca es mucho más rápida que el giro en  $\theta$ .

Como ya se están imaginando, la trayectoria de  $m_1$  sobre la mesa será algo así como la combinación de un movimiento circular más oscilaciones radiales, al menos en una primera aproximación...

## 6. Inciso (f)

El último inciso nos pide directamente resolver numéricamente el problema. A nivel técnico no hay nada nuevo, es lo mismo que ya hicimos para el problema 2.10 y 2.15, se resuelven las ecuaciones de Newton con el Método de Euler de segundo orden. Para más detalle miren el código correspondiente a este problema. Es interesante sin embargo mirar las distintas trayectorias que describe la partícula  $m_1$  sobre el plano, para distintos valores de la energía mecánica  $H$ , desde  $H = V_{eff}(r_c)$  hasta  $H \gg V_{eff}(r_c)$

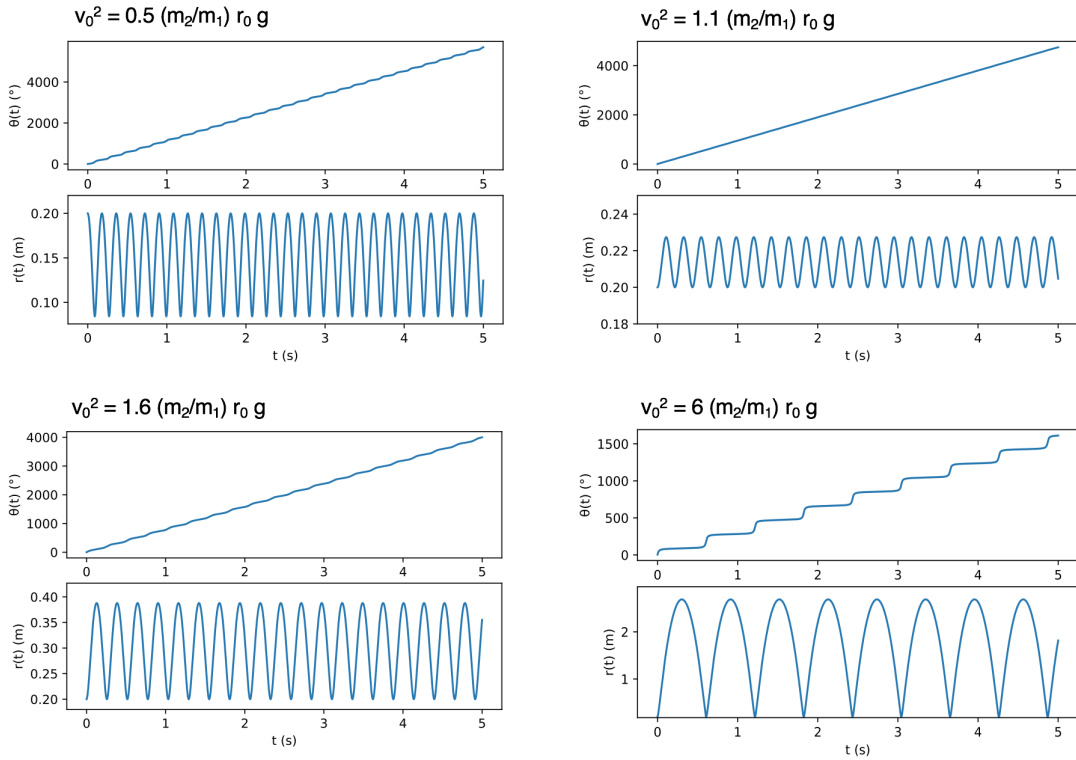


Figura 4: Gráficos de  $r(t)$  y  $\theta(t)$  para distintas condiciones iniciales.

En la Figura 4 se muestran las funciones  $r(t)$  y  $\theta(t)$  al variar  $H$  a partir de distintas condiciones

iniciales. En concreto tomamos distintos valores de  $v_0$  ilustrando la proporcionalidad con el  $v_0 = \sqrt{g r_0 \frac{m_2}{m_1}}$  que genera el movimiento circular. Para  $v_0 = 1,1 \sqrt{g r_0 \frac{m_2}{m_1}}$  se ve como la aproximación de pequeñas oscilaciones se cumple muy bien, para  $v_0 = 6 \sqrt{g r_0 \frac{m_2}{m_1}}$  por ejemplo, el movimiento se aparta considerablemente del oscilador armónico. Los invito a jugar con los parámetros en el código y observar las distintas trayectorias. En la Figura 5 se ilustran las trayectorias  $(r, \theta)$  que describe la masa  $m_1$  (son capturas de pantalla de las simulaciones numéricas) para las distintas condiciones iniciales.

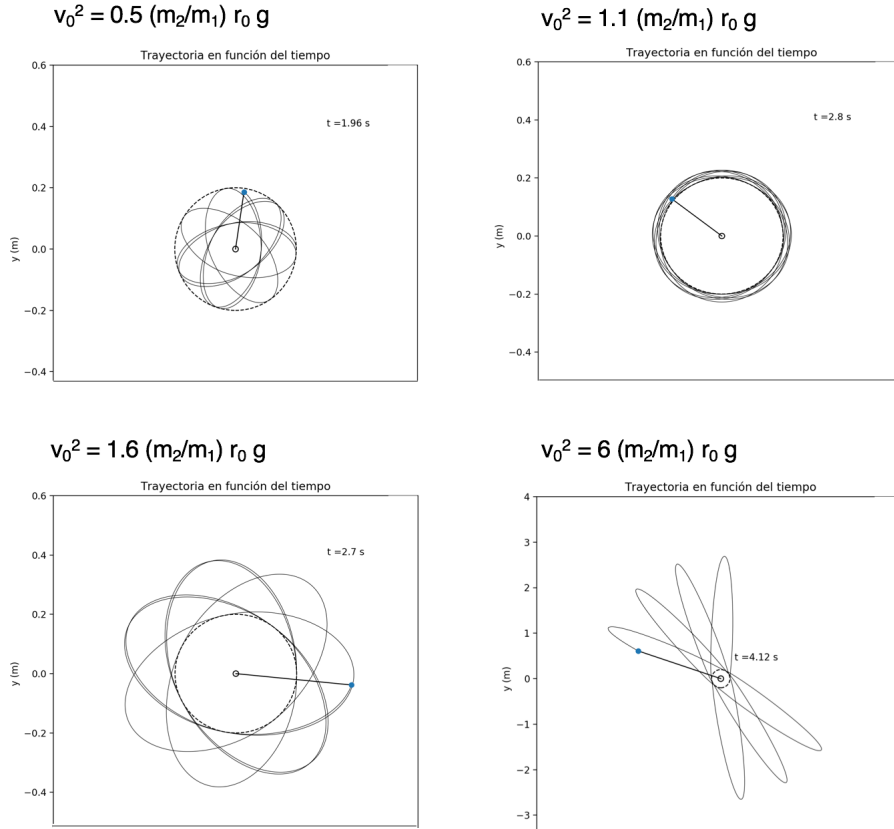


Figura 5: Capturas de las simulaciones de las trayectorias de la masa  $m_1$  para distintas condiciones iniciales.

Finalmente los gráficos para  $z(t)$  que pide el problema van a ser básicamente iguales a los de  $r(t)$  dado el vínculo entre las masas.

