Física 2 (Física) – Cátedra Diego Arbó

Primer Cuatrimestre de 2025

Repaso: Números Complejos

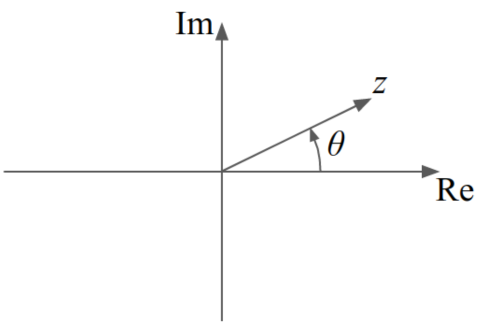
1. Para cada uno de los siguientes números, halle sus partes real e imaginaria, y dibújelos en el plano complejo:

   a) 0
   b) ± 1
   c) $\pm i$
   d) i^2
   e) $0i$
   f) a (con a real)
   g) bi (con b real)
   h) $1 \pm i$
   i) $-1 \pm i$
   j) $\cos(\theta) \pm i\sin(\theta)$ (con θ entre 0 y 2π)
   k) $a \pm bi$
   l) $\pm\sqrt{a^2+b^2}$
   m) $\pm i\sqrt{a^2+b^2}$
   n) $(a+bi)^2$

   Nota: a, b y θ son números reales.

2. Para un número complejo z, se define su módulo $|z|$ como la distancia euclídea que separa a z del origen del plano complejo. Escriba la expresión más general para el módulo de z en función de sus partes real e imaginaria, y luego aplíquela a cada caso del primer ejercicio.

3. Se define el argumento $\arg(z)$ de un número complejo z como el ángulo θ formado entre el eje real y la línea que va desde el origen a z, considerando positivo al sentido de giro que va desde el eje $\mathfrak{Re}^+$ hacia el eje $\mathfrak{Im}^+$.



   Halle el argumento para todos los casos del primer ejercicio.

4. Se define el conjugado de un número complejo $z = a + bi$ como $\overline{z} = a - bi$.

   a) Verifique que el conjugado de un número real es ese mismo número real.

b) Verifique que el conjugado de un número imaginario puro es ese mismo número multiplicado por -1.

c) Verifique que el conjugado de un número complejo arbitrario corresponde a una reflexión (en el plano complejo) del número original respecto al eje real.

d) ¿Cuál es el conjugado de 0?

Nota: El conjugado de z suele representarse también como z^*.

5. Obtenga el conjugado para todos los números del primer ejercicio, y determine sus partes real e imaginaria, su módulo y su argumento. Si es posible, use los resultados anteriores para ahorrar cuentas.

6. Verifique la siguiente identidad:

$$z\overline{z} = |z|^2$$

7. Halle las partes real e imaginaria de los siguientes números:

   a) $\frac{1+i}{1-i}$
   b) $\frac{1+i}{1+i}$
   c) $(1+i)(1-i)$
   d) $(1+i)^2$
   e) $(1+i)^3$
   f) $(1+i)^4$
   g) $\sqrt{(1+i)(1-i)}$
   h) i^0
   i) i^n (con n entero positivo)
   j) $1/i^n$ (con n entero positivo)
   k) $1/(a+bi)$ (con a y b número reales, y $|a+bi|$ distinto de 0)
   l) $1/(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$

   Ayuda: Puede ser útil emplear la identidad del ejercicio anterior para trabajar con denominadores complejos.

8. ¿Cuáles de los siguientes datos me permiten determinar completamente a un número complejo cualquiera?

   a) Su parte real y su parte imaginaria
   b) Su parte real y la parte imaginaria de su conjugado
   c) Las partes real e imaginaria de su conjugado
   d) Su módulo y su parte real
   e) Su módulo y su parte imaginaria
   f) Su módulo y su argumento
   g) Su argumento y su parte real
   h) Su argumento y su parte imaginaria

9. Compare el plano complejo con el plano $\mathbb{R}^2$. Analice similitudes y diferencias entre vectores de $\mathbb{R}^2$ y números complejos. ¿Es posible pensar a un número complejo como un vector? ¿Qué forma de representar un número complejo se parece a la representación cartesiana de un vector? ¿Y a la representación polar?

10. Considere la fórmula de Euler:
$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$
A partir de la misma, demuestre la identidad de Euler:
$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

11. Un número complejo z puede representarse en forma polar de la siguiente manera:
$$z = |z|e^{i\arg(z)}$$
    a) Obtenga las partes real e imaginaria a partir de dicha representación.
    b) Verifique, a partir de la definición de complejo conjugado, que el conjugado de $e^{i\theta}$ es $e^{-i\theta}$.

12. Obtenga y grafique las partes real e imaginaria de las siguientes funciones del tiempo:
    a) $\exp(i\omega t)$
    b) $\exp(-i\omega t)$
    c) $\exp(i(\omega t + \pi/2))$
    d) $\exp(i(\omega t - \pi/2))$
    e) $\exp(i\omega_1 t) + \exp(i\omega_2 t)$
    f) $i\exp(i\omega t)$
    g) $-\exp(i\omega t)$
    h) $1/2(\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t))$
    i) $1/(2i)(\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t))$

13. A partir de la fórmula de Euler, demuestre que:
    a) $\cos(x) = 1/2(e^{ix} + e^{-ix})$
    b) $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$
    c) $\cosh(x) = \cos(ix)$ (con x real)
    d) $\sinh(x) = -i\sin(ix)$ (con x real)

14. Verifique la identidad trigonométrica del coseno de la suma y resta de ángulos mediante la fórmula de Euler. (**Ayuda:** desarrolle el lado derecho mediante exponenciales complejas; no hace falta tomar parte real.) ¿Cómo puede obtener la identidad correspondiente al seno?

15. Use la fórmula de Euler para hallar las dos raices cuadrada de i, escritas mediante sus partes real e imaginaria.