
La vez pasada vimos como se redistribuyen las cargas en un conductor, la idea de la clase de hoy es ver como es el campo eléctrico que se genera dentro de un conductor debido a esa redistribución de cargas. Luego vamos a introducir la capacidad y vamos a cerrar la clase con dieléctricos.

1. Conductores:

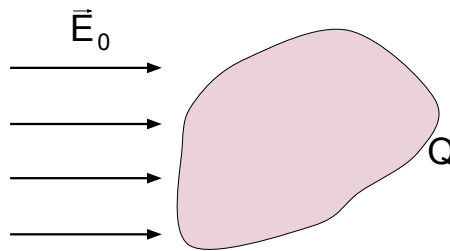
Arranquemos con un ejercicio de conductores. Vamos a hacer el **ejercicio 3** de la guía 2. Este ejercicio propone lo siguiente:

En un campo eléctrico uniforme E_0 se introduce un cuerpo conductor de forma arbitraria cargado con carga total Q .

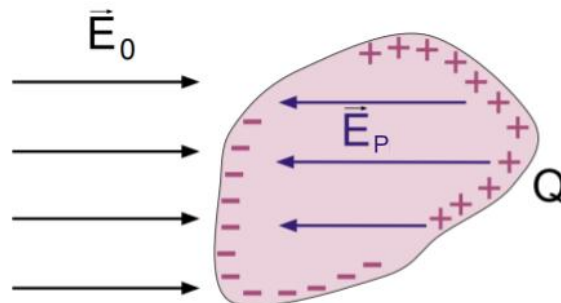
(a) ¿Que valor tiene la fuerza eléctrica que se ejerce sobre el cuerpo?

(b) Como consecuencia de la inducción de cargas sobre la superficie del conductor, el campo dejara de ser uniforme en la vecindad del cuerpo. Si se “congela” la distribución superficial de carga y se quita el campo externo, ¿cómo sería el campo en el interior del cuerpo? Notar que al congelar la carga superficial, el cuerpo pierde las propiedades de un conductor.

Tenemos un campo eléctrico uniforme \vec{E}_0 en el que se introduce un cuerpo conductor de forma arbitraria cargado con carga total Q .



Lo primero que nos preguntan es qué valor tiene la fuerza eléctrica que siente el conductor. Si tenemos un conductor en un campo sus cargas van a moverse libremente ubicándose sobre la superficie de modo de anular el campo en el interior del conductor.



Tenemos un campo \vec{E}_p producido por las cargas que se reorganizan en el conductor. El campo producido debe ser tal que en el interior del conductor:

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p \Big|_{interior} = 0$$

De modo que:

$$\boxed{\vec{E}_p|_{interior} = -\vec{E}_0}$$

Notar que \vec{E}_p no vale necesariamente lo mismo afuera del conductor.

La fuerza total sobre el cuerpo es:

$$\vec{F} = \int_V \rho(\vec{r}) \vec{E}_{tot} dV$$

Como las cargas están distribuidas en superficie:

$$\vec{F} = \int_S \sigma(\vec{r}) \vec{E}_{tot} dA$$

Sobre la superficie el campo no se anula, debemos escribir el campo como:

$$\vec{F} = \int_S \sigma(\vec{r}) \vec{E}_0 dA + \int_S \sigma(\vec{r}) \vec{E}_P dA$$

El segundo término es la autointeracción y se anula ya que la interacción de la carga i con la j se cancela con la interacción de la j con la i . Es decir que $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$. Por lo cual, solo nos queda:

$$\boxed{\vec{F} = \int_S \sigma(\vec{r}) \vec{E}_0 dA = \vec{E}_0 \int_S \sigma(\vec{r}) dA = Q \vec{E}_0}$$

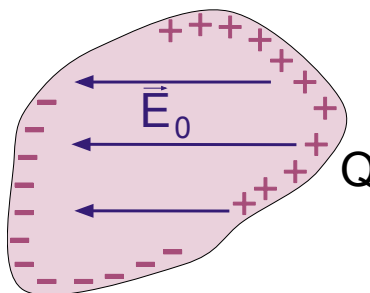
El conductor se comporta en términos de su fuerza neta como si toda su carga estuviese concentrada en un punto. La forma arbitraria del conductor no nos importa para la fuerza total.

En el ítem (b) nos piden el campo interior del conductor si congelamos las cargas y apagamos el campo \vec{E}_0 . En el interior teníamos que:

$$\vec{E}_{tot} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E}_p = -\vec{E}_0 \text{ (en el interior del conductor)}$$

Si eliminamos el campo \vec{E}_0 pero dejamos fija la distribución de cargas tenemos simplemente:



El campo en el interior ya no es cero (ya no es un conductor). Lo que hace que el campo en el interior pueda anularse es que las cargas pueden moverse libremente.

2. Capacidad:

En el ejercicio anterior vimos que un conductor redistribuye sus cargas para anular el campo interno. Ahora vamos a cuantificar qué significa cargar un conductor: cuánta carga puede almacenar y qué potencial adquiere.

Definimos la capacidad como:

$$C = \frac{Q}{\Delta\Phi}$$

Donde Q es la carga del conductor, $\Delta\Phi$ es el potencial del conductor respecto a una referencia y C es la capacidad. La unidad de la capacidad es $\frac{[C]}{[\Phi]} = F$ (faradios).

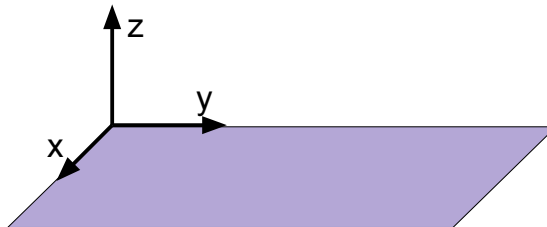
La capacidad depende solo de la geometría y del medio. Es la facilidad que tiene un conductor para almacenar carga. Mayor es la capacidad C más carga puede almacenar para un mismo potencial.

Vamos a hacer el **ejercicio 4 (d)**:

Calcular la capacidad de las siguientes configuraciones de conductores:

(d) por unidad de área, para un condensador plano infinito; si la separación entre placas es de 1 mm, dar el valor del área para que $C = 1F$.

Entonces tenemos dos placas planas infinitas cargadas. Para calcular la capacidad necesitamos la diferencia de potencial entre las placas. Para eso primero calculamos el campo eléctrico usando Gauss y superposición.

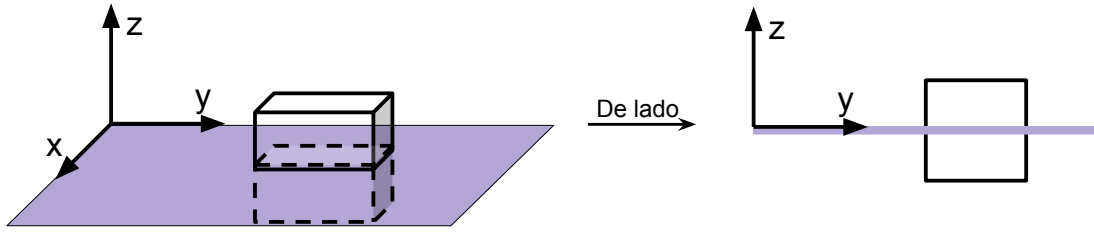


Por la simetría de traslación a lo largo de los ejes x e y sabemos que el campo eléctrico para una única lamina infinita con σ (centrada en el origen) es independiente de esas coordenadas. Asimismo si vemos la contribución de las cargas para un punto O vemos que el campo debe apuntar en dirección z . Por último, debido a la simetría de reflexión en el plano xy , sabemos que el campo en $z > 0$ debe ser de sentido contrario al de $z < 0$.

Es decir que tenemos:

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} E(z)\hat{z} & \text{si } z > 0 \\ -E(z)\hat{z} & \text{si } z < 0 \end{cases}.$$

Para hacer Gauss podemos elegir un cubo de lado L .



Entonces tenemos:

$$\int_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Donde Q_{enc} es la carga encerrada por la caja, que vale:

$$Q_{enc} = \int_V \rho dV = \int_0^L \int_0^L \sigma dx dy = \sigma L^2$$

Por otra parte, para la integral de \vec{E}_1 , sólo nos sobreviven los términos cuyas normales van en \hat{z} , es decir, los términos correspondientes a la base y la tapa de la caja. Eso es:

$$\int_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \int_0^L \int_0^L E(z) \hat{z} \cdot \hat{z} dx dy + \int_0^L \int_0^L -E(-z) \hat{z} \cdot -\hat{z} dx dy = 2L^2 E(z)$$

Juntando todo tenemos:

$$\begin{aligned} 2L^2 E(z) &= \frac{L^2 \sigma}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow E(z) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

Entonces, finalmente obtenemos:

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{si } z > 0 \\ \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} & \text{si } z < 0 \end{cases}.$$

Si añadimos otra lamina infinita pero ahora con $-\sigma$ en $z = d$ tenemos:

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{si } z > d \\ -\frac{-\sigma}{2\epsilon_0} & \text{si } z < d \end{cases}.$$

Por superposición tenemos:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} & \text{si } 0 < z < d \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Vamos a calcular la diferencia de potencial entre las placas, para eso integramos:

$$\int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dz = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = -\Phi(d) + \Phi(0) = \Delta\Phi$$

El $\Delta\Phi$ lo definimos positivo porque para la definición de la capacidad se utiliza la diferencia de potencial positiva (al igual que la carga positiva del par de conductores). Como queremos la carga por unidad de área vamos a usar que $\sigma = \frac{Q}{A}$ con A el área de la placa. Reemplazando esto:

$$\Delta\Phi = \frac{Qd}{A\epsilon_0}$$

Utilizando la definición de capacidad $C = \frac{Q}{\Delta\Phi}$ tenemos:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Entonces por unidad de área:

$$\boxed{\frac{C}{A} = \frac{\epsilon_0}{d}}$$

Luego, en la consigna, nos piden el área si $d = 1\text{mm} = 10^{-3}\text{m}$ y $C = 1\text{F}$:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{M}} \\ \Rightarrow A &= \frac{Cd}{\epsilon_0} = 1,13 \times 10^8 \text{m}^2\end{aligned}$$

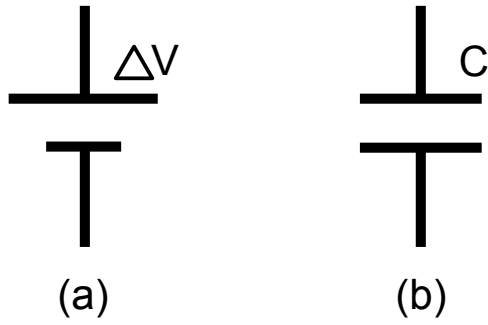
Entonces si tenemos dos placas separadas un milímetro y queremos que tenga una capacidad de 1 faradio necesitaríamos un conductor enorme. Una manera de aumentar la capacidad sin aumentar el área es usando dieléctricos.

3. Capacitores y Circuitos:

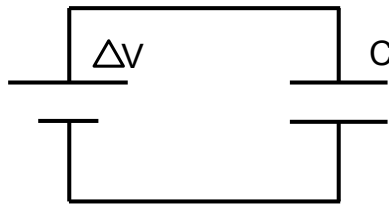
Por ahora vamos a usar circuitos solo como forma de representar conexiones entre conductores. No vamos a hablar de corrientes todavía, solo de cargas y diferencias de potencial.

Elementos de circuito (esta lista se va a ir completando a lo largo de la materia):

- **Batería:** Representa una diferencia de potencial fija ΔV entre dos puntos. Su símbolo es el que se muestra en la figura (a).
- **Capacitor:** Son dos conductores separados (generalmente planos) que pueden almacenar carga. Su símbolo se muestra en la figura (b). Almacena cargas $+Q$ y $-Q$ y tiene capacidad $C = \frac{Q}{\Delta V}$
- **Cables ideales:** Si dos puntos están conectados por un cable ideal entonces están al mismo potencial.



Como un primer ejemplo podemos ver el siguiente circuito:



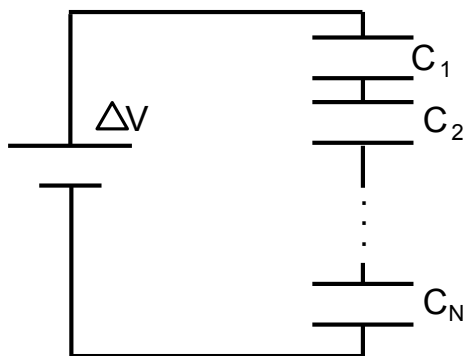
La diferencia de potencial en el capacitor vale ΔV de modo que la carga que almacena es $C\Delta V = Q$.

3.1. Capacidad Equivalente:

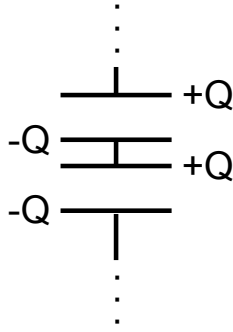
Para circuitos más complicados es útil representar un conjunto de capacidades como una única capacidad equivalente. Tenemos dos casos:

3.1.1. Capacitores en serie:

Tenemos un circuito de la siguiente forma:



y queremos representarlo como un circuito con una única capacidad C_{eq} . En este caso no todos los capacitores estarán a la misma diferencia de potencial, pero todos tendrán la misma carga Q :



Por lo cual:

$$Q = C_1 \Delta V_1 = C_2 \Delta V_2 = \dots = C_N \Delta V_N$$

La diferencia de potencial total estara dada por la batería:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_N$$

Entonces:

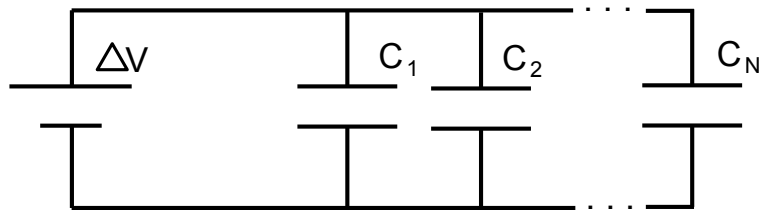
$$\Delta V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_N} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} \right) \equiv \frac{Q}{C_{eq}}$$

Por lo cual, definimos:

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}}$$

3.1.2. Capacitores en paralelo:

Tenemos un circuito con la forma:



y nuevamente queremos encontrar una C_{eq} . En este caso las cargas Q no serán iguales, pero todos los capacitores están en la misma diferencia de potencial ΔV , es decir que:

$$\Delta V = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \dots = \frac{Q_N}{C_N}$$

Entonces:

$$\Delta V C_1 + \Delta V C_2 + \dots + \Delta V C_N = Q_{tot}$$

Por lo cual,

$$\Delta V (C_1 + C_2 + \dots + C_N) = Q_{tot}$$

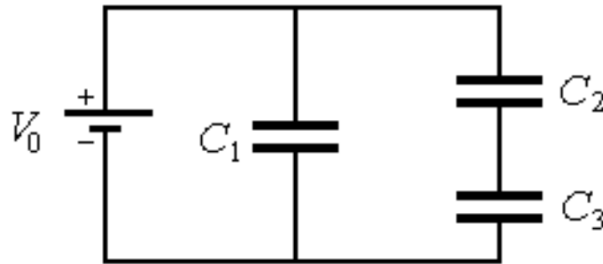
$$C_1 + C_2 + \dots + C_N = \frac{Q_{tot}}{\Delta V}$$

Entonces, definimos la capacidad equivalente para capacitores en paralelo como:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N$$

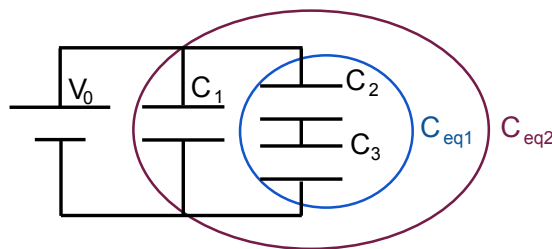
Con esto pasamos a resolver el **ejercicio 8**, la consigna es la siguiente:

En el circuito de la figura:



- (a) Calcule la capacidad equivalente que se observa desde la batería.
- (b) Encuentre las cargas de cada condensador y calcule la energía del sistema.
- (c) Se desconecta la batería, ¿se redistribuyen las cargas?
- (d) Si ahora agregamos un dieléctrico lineal de permitividad ϵ en el condensador C_1 , ¿cómo se redistribuyen las cargas? ¿Cuál es la energía del sistema? ¿Dónde está la energía que falta?

Entonces en el ítem (a) nos piden calcular la C_{eq} , eso es simplemente:



Vamos a calcular C_{eq1} y con ella calcular C_{eq2} . Para C_{eq1} tenemos dos capacitores en serie:

$$C_{eq1} = \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)^{-1} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$$

Luego, C_1 esta en paralelo a C_{eq1} entonces:

$$C_{eq2} = C_1 + C_{eq1} = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$$

En el ítem (b) nos piden calcular las cargas en cada capacitor. Como los capacitores 2 y 3 estan en serie tienen la misma carga Q_{23} y vale que:

$$Q_{23} = C_{eq1} V_0$$

Para el capacitor 1 tenemos:

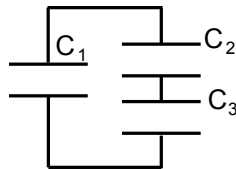
$$Q_1 = C_1 V_0$$

Para calcular la energía podemos usar directamente C_{eq2} :

$$U = \frac{1}{2} C_{eq2} V_0^2$$

$$U = \frac{1}{2} \left(C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} \right) V_0^2$$

En el ítem (c) nos proponen que la batería se desconecta. La pregunta es ¿se redistribuyen las cargas?



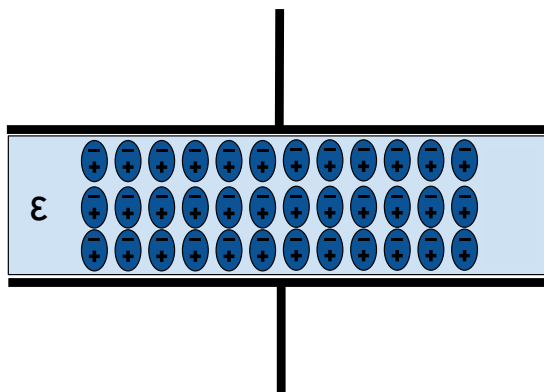
Como el circuito esta aislado la carga total se conserva. Como no hay conexión entre las ramas, las cargas no pueden redistribuirse.

En el ítem (d) nos preguntan que cambia al colocar un dieléctrico entre las placas de C_1 . Para eso tenemos que introducir un nuevo tema.

4. Dieléctricos

Un dieléctrico es un material aislante, es decir, un material en el cual las cargas eléctricas no pueden moverse libremente a través de todo el volumen. A diferencia de un conductor, donde las cargas se redistribuyen hasta anular el campo en el interior, en un aislante las cargas permanecen ligadas a sus posiciones, aunque pueden desplazarse ligeramente a nivel microscópico.

Cuando un dieléctrico se coloca en un campo eléctrico, sus cargas positivas y negativas se separan levemente. Este fenómeno se denomina polarización. Como resultado, aparecen cargas ligadas en las superficies del material, que no son libres de moverse, pero generan un campo eléctrico propio.



El efecto macroscópico de esta polarización es que el campo generado por el dieléctrico se opone al campo externo, reduciendo el campo eléctrico total en su interior. Este efecto se incorpora a nivel macroscópico reemplazando la permitividad del vacío ϵ_0 por la permitividad del medio:

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

donde ϵ_r es la permitividad relativa del material. En consecuencia, todas las expresiones que involucraban ϵ_0 en el vacío deben modificarse utilizando ϵ al considerar un dieléctrico. Notar que $\epsilon > \epsilon_0$

En el caso del ítem (d) tenemos un dieléctrico entre las placas de un capacitor plano. El dieléctrico genera un campo \vec{E} que se opone al campo externo (generado por las placas). Es decir que la diferencia de potencial disminuye entre las placas, mientras que la carga en cada placa conductora esta fija porque el sistema esta aislado. Entonces la nueva capacidad \tilde{C}_1 sera mayor. Cuantitativamente lo podemos ver utilizando el resultado del ejercicio 4 (d), donde cambiando ϵ_0 por ϵ :

$$\tilde{C}_1 = \frac{\epsilon A}{d} = \epsilon_r C_1$$

Con $\epsilon_r > 1$ porque $\epsilon > \epsilon_0$. Entonces la energía:

$$U = \frac{1}{2} \tilde{C}_{eq} \tilde{V}^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\tilde{C}_{eq2}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_r C_{eq2}}$$

Como $\epsilon_r > 1$ la energía en el capacitor disminuye: misma carga libre y menor diferencia de potencial.

Aquí arriba resolvimos el problema a carga fija, es decir un sistema aislado desconectado de la batería. En este caso la carga libre Q sobre los conductores se conserva, pero al introducir el dieléctrico disminuye la diferencia de potencial entre las placas. La situación es diferente si se trabaja con el problema a potencial fijo, es decir con el capacitor conectado a una batería. En este otro caso la batería se encarga de depositar mas carga eléctrica en las placas conductoras para compensar la atenuación que produce la polarización en el dieléctrico; la carga libre Q aumenta y la diferencia de potencial es fija. En ambos casos se obtiene un sistema con mayor capacidad C . ¿Cómo cambia la energía almacenada en el capacitor en este otro caso?