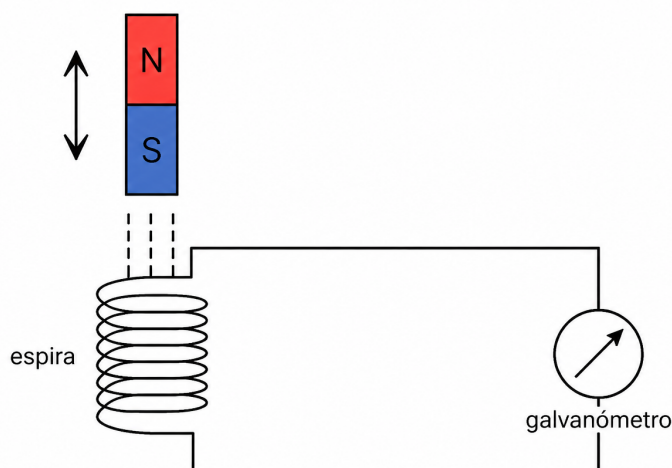

La clase pasada vimos la ley de Ampère y calculamos el campo magnético generado por un solenoide infinito. La ley de Ampère va a formar parte de las llamadas ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo. Otra de estas ecuaciones va a estar dada por la ley que veremos hoy, llamada Ley de Faraday.

1. Ley de Faraday y Ley de Lenz

En 1820, Oersted descubrió que una corriente eléctrica genera un campo magnético. Este descubrimiento mostró por primera vez una conexión entre electricidad y magnetismo. A partir de esto, Faraday se planteó pregunta: ¿Puede un campo magnético generar corriente eléctrica?

Para responder esta pregunta, Faraday en 1831 realizó una serie de experimentos utilizando imanes, espiras conductoras y galvanómetros (para detectar la corriente). Uno de los experimentos más importantes consistía en acercar y alejar un imán de una espira conectada a un galvanómetro como se muestra en la siguiente figura.



Cuando el imán permanecía quieto respecto de la espira, el galvanómetro no detectaba corriente. Sin embargo, al mover el imán aparecía una corriente inducida en la espira. Además, si el imán se alejaba en lugar de acercarse, la corriente cambiaba de sentido. Faraday observó también que cuanto más rápido era el movimiento relativo entre el imán y la espira, mayor era la corriente inducida.

De estos experimentos se concluyó que la corriente inducida no depende de la existencia de un campo magnético, sino de la variación del campo magnético que atraviesa la espira.

Para cuantificar esta idea se introduce el concepto de flujo magnético. El flujo magnético a través de una superficie se define como

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

donde $\vec{B}$ es el campo magnético y $d\vec{S}$ es el vector superficie perpendicular a cada elemento de área.

A partir de sus observaciones experimentales, Faraday concluyó que la fuerza electromotriz (FEM) inducida en un circuito es proporcional a la rapidez con la que cambia el flujo magnético a través de dicho circuito. Esto conduce a la ley de Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

El signo negativo en esta expresión fue interpretado posteriormente por Lenz en 1834. La llamada ley de Lenz establece que la corriente inducida circula en el sentido tal que el campo magnético que genera se opone a la variación del flujo magnético que la produjo.

En otras palabras, la corriente inducida tiende a impedir el cambio de flujo magnético a través del circuito. Este comportamiento es una consecuencia directa de la conservación de la energía.

La ley de Faraday también puede escribirse en forma diferencial. Utilizando el teorema de Stokes,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S},$$

y reemplazando en la forma integral de la ley de Faraday,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

se obtiene

$$\int (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Como esta igualdad debe cumplirse para cualquier superficie, se llega a la forma diferencial de la ley de Faraday:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Esta ecuación muestra que un campo magnético variable en el tiempo genera un campo eléctrico no conservativo.

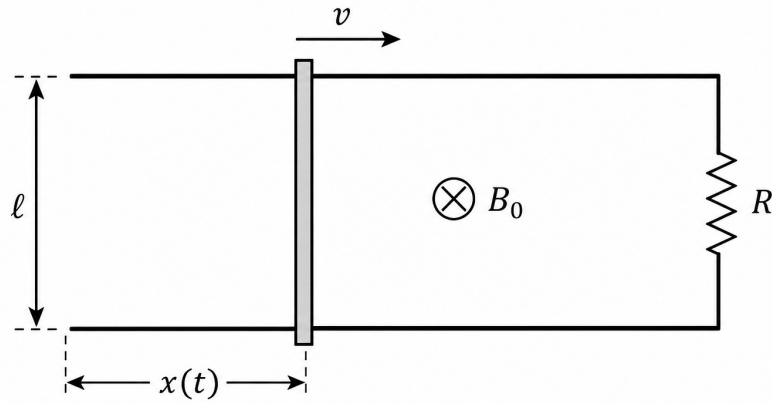
Con esto tenemos todo lo que necesitamos para comenzar a resolver ejercicios de la guía 5.

1.1. Ejercicio 2

Una barra metálica de masa m se desliza sin rozamiento sobre dos rieles conductores largos y paralelos, separados por una distancia l . Entre los extremos de los rieles se conecta una resistencia R . Además, existe un campo magnético uniforme $\vec{B}_0$ perpendicular al plano de los rieles. En el instante $t = 0$ se le comunica a la barra una velocidad inicial v_0 . ¿Qué sucede a continuación? ¿Se para la barra? ¿Cuándo y dónde? ¿Qué ocurre con la conservación de la energía?

1.1.1. FEM inducida

Tenemos el esquema de la figura:



Al desplazarse la barra, el área encerrada por el circuito cambia con el tiempo. Por lo tanto, también cambia el flujo magnético a través del circuito a pesar de que el campo magnético $\vec{B}$ es constante.

El flujo magnético viene dado por

$$\Phi_B = -B_0 A.$$

Como el área encerrada es

$$A = lx,$$

el flujo puede escribirse como

$$\Phi_B = -B_0 l(x_0 - x(t)).$$

Aplicando la ley de Faraday,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

obtenemos

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(-B_0 l(x_0 - x(t))).$$

Dado que B_0 y l son constantes,

$$\mathcal{E} = -B_0 l \frac{dx}{dt}.$$

Resulta

$$\boxed{\mathcal{E} = -B_0 l v}.$$

Donde la velocidad v no tiene por qué ser constante, ya que la barra siente una fuerza magnética generada por la interacción entre el campo $\vec{B}_0$ y la corriente inducida I sobre ella. Vamos a calcular esta fuerza, para ello primero necesitamos la corriente.

1.1.2. Corriente inducida

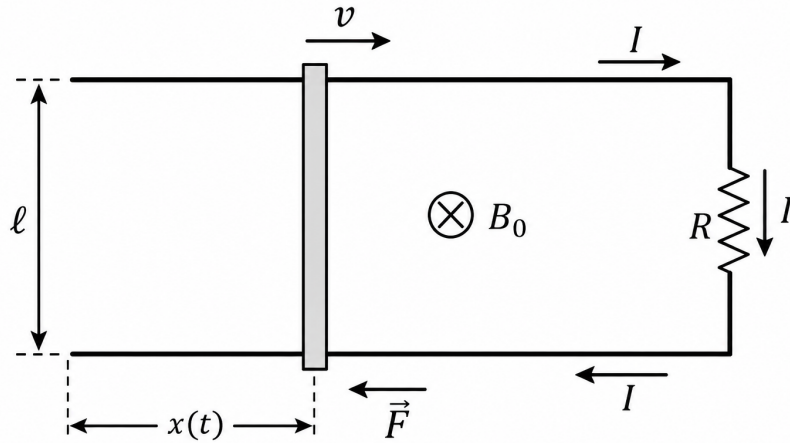
Aplicando la ley de Ohm,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

usando el resultado anterior queda

$$I = \frac{B_0 l v}{R}.$$

El sentido de esta corriente se determina mediante la ley de Lenz: la corriente inducida debe generar un campo magnético que se oponga a la variación del flujo magnético producida por el movimiento de la barra. En este caso, al disminuir el área, el flujo se reduce con el tiempo, en consecuencia el signo de la corriente sera positivo respecto a la dirección del campo magnético $\vec{B}_0$, como se muestra en la siguiente figura.



1.1.3. Fuerza magnética

La barra, al conducir una corriente en presencia de un campo magnético, experimenta una fuerza magnética dada por

$$d\vec{F}_B = I d\vec{l} \times \vec{B}_0 = I dl \hat{y} \times B_0 (-\hat{z}).$$

El sentido de esta fuerza resulta opuesto al movimiento de la barra. Por lo tanto, la fuerza magnética actúa como una fuerza de frenado.

El módulo de la fuerza es

$$F_B = IlB_0.$$

Sustituyendo la corriente obtenida anteriormente,

$$F_B = \left(\frac{B_0 l v}{R} \right) l B_0,$$

$$F_B = \frac{B_0^2 l^2}{R} v.$$

1.1.4. Ecuación de movimiento

Para obtener $v(t)$ aplicamos la segunda ley de Newton,

$$m \frac{dv}{dt} = -F_B,$$

queda

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{B_0^2 l^2}{R} v.$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B_0^2 l^2}{mR} v.$$

Esta es una ecuación diferencial cuya solución es

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau},$$

donde

$$\tau = \frac{mR}{B_0^2 l^2}.$$

Por lo tanto, la velocidad disminuye exponencialmente con el tiempo. La barra nunca se detiene completamente, sino que su velocidad tiende asintóticamente a cero.

1.1.5. Conservación de la energía

El problema nos pide analizar la situación desde el punto de vista energético. Partiendo de la ecuación de movimiento tenemos,

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{B_0^2 l^2}{R} v,$$

multiplicamos ambos lados por la velocidad v :

$$mv \frac{dv}{dt} = -\frac{B_0^2 l^2}{R} v^2.$$

El miembro izquierdo puede escribirse como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right),$$

por lo tanto,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = -\frac{B_0^2 l^2}{R} v^2.$$

Que es la variación de la energía cinética de la barra con el tiempo. La pregunta es, ¿a dónde va esa energía?

Veamos la potencia disipada por la resistencia R , la corriente inducida en el circuito es

$$I = \frac{B_0 \ell v}{R}.$$

Entonces la potencia disipada queda,

$$I^2 R = \left(\frac{B_0 \ell v}{R} \right)^2 R = \frac{B_0^2 \ell^2}{R} v^2.$$

Notemos que lo que obtenemos es lo siguiente

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = -I^2 R.}$$

Esta expresión muestra que la disminución de la energía cinética de la barra es igual a la potencia disipada en la resistencia.

Por lo tanto, se verifica la conservación de la energía.

1.2. Ejercicio 5

Un solenoide corto de longitud l , radio a y n_1 vueltas por unidad de longitud se encuentra ubicado coaxialmente dentro de un solenoide muy largo de radio b y n_2 vueltas por unidad de longitud. Por el solenoide largo circula una corriente I . Calcular el flujo magnético a través del solenoide corto.

1.2.1. Campo magnético generado por el solenoide largo

Como el solenoide exterior puede considerarse infinito, el campo magnético en su interior viene dado por la ley de Ampère como vimos la clase pasada:

$$B = \mu_0 n_2 I.$$

Este campo es aproximadamente uniforme en toda la región interior del solenoide largo y está dirigido a lo largo de su eje.

1.2.2. Flujo magnético sobre una espira del solenoide corto

El solenoide corto se encuentra completamente dentro de la región donde existe campo magnético uniforme. El flujo magnético a través de una espira del solenoide corto es

$$\Phi_1 = BS,$$

donde S es el área de una espira del solenoide corto:

$$S = \pi a^2.$$

Entonces,

$$\Phi_1 = (\mu_0 n_2 I) \pi a^2.$$

Flujo total concatenado

El solenoide corto tiene n_1 vueltas por unidad de longitud y longitud l . Por lo tanto, el número total de espiras es

$$N_1 = n_1 l.$$

El flujo total concatenado con el solenoide corto resulta

$$\Phi_B = N_1 \Phi_1.$$

Sustituyendo,

$$\Phi_B = (n_1 l)(\mu_0 n_2 I \pi a^2).$$

Finalmente,

$$\Phi_B = \mu_0 n_1 n_2 \pi a^2 l I.$$

1.2.3. Interpretación física

Este problema es un ejemplo de inducción mutua. El campo magnético generado por la corriente en el solenoide largo produce un flujo magnético sobre el solenoide corto.

Si la corriente I variara con el tiempo, el flujo magnético también cambiaría y se induciría una fuerza electromotriz en el solenoide corto según la ley de Faraday.

2. Autoinductancia

Hasta ahora analizamos situaciones donde un campo magnético externo variable inducía una corriente en un circuito. Sin embargo, un circuito también puede inducir una fuerza electromotriz sobre sí mismo cuando la corriente que circula por él cambia con el tiempo. Este fenómeno se conoce como autoinducción.

Para entender este efecto, recordemos que una corriente eléctrica genera un campo magnético. Por lo tanto, si la corriente que circula por un circuito varía con el tiempo, también lo hará el campo magnético producido por dicha corriente. En consecuencia, el flujo magnético a través del propio circuito cambiará con el tiempo.

Según la ley de Faraday, toda variación de flujo magnético induce una fuerza electromotriz. Por lo tanto, una corriente variable induce una FEM en el mismo circuito que generó el campo magnético.

La ley de Lenz nos dice que: la corriente inducida siempre se opone a la variación de flujo magnético que la produce. En el caso de la autoinducción, esto significa que la FEM inducida se opone a las variaciones de corriente en el circuito.

Por ejemplo:

- si la corriente aumenta con el tiempo, la FEM inducida tenderá a disminuirla;
- si la corriente disminuye, la FEM inducida tenderá a mantenerla.

Un circuito con inductancia tiende a oponerse a cambios en la corriente.

Definimos la autoinductancia L mediante la relación

$$\boxed{\Phi_B = LI},$$

donde Φ_B es el flujo magnético total concatenado con el circuito e I es la corriente que circula por él.

La inductancia depende únicamente de la geometría del circuito y del medio material donde se encuentra el campo magnético.

Aplicando la ley de Faraday,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

y usando la definición anterior,

$$\Phi_B = LI,$$

obtenemos

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(LI).$$

La inductancia es constante mientras no cambie la geometría o el medio, entonces,

$$\boxed{\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}}.$$

Esta ecuación muestra que una variación temporal de la corriente genera una fuerza electromotriz inducida que se opone a dicho cambio de corriente.

Vamos a ver algunos casos particulares.

2.1. Ejercicio 6 (a)

Calcular la autoinductancia por unidad de longitud de un solenoide infinito de radio R y n vueltas por unidad de longitud.

Para calcular la autoinductancia necesitamos determinar el flujo magnético generado por el propio solenoide. A partir de la ley de Ampère nuevamente tenemos que el campo magnético en el interior de un solenoide infinito es

$$B = \mu_0 n I.$$

Además, el campo magnético fuera del solenoide es aproximadamente nulo.

El flujo magnético a través de una espira del solenoide es

$$\Phi_1 = B\pi R^2.$$

Entonces,

$$\Phi_1 = (\mu_0 n I)\pi R^2.$$

Ahora bien, queremos calcular el flujo total concatenado con todas las espiras contenidas en una longitud l del solenoide.

Como el solenoide tiene n vueltas por unidad de longitud, el número total de espiras es

$$N = nl.$$

Por lo tanto, el flujo total es

$$\Phi_B = N\Phi_1.$$

Sustituyendo,

$$\Phi_B = (nl)(\mu_0 n I \pi R^2).$$

Reordenando,

$$\Phi_B = \mu_0 n^2 \pi R^2 l I.$$

Usando la definición de inductancia,

$$\Phi_B = LI,$$

dividiendo por la corriente I tenemos

$$L = \mu_0 n^2 \pi R^2 l.$$

Finalmente, la autoinductancia por unidad de longitud resulta

$$\boxed{\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 \pi R^2}.$$