

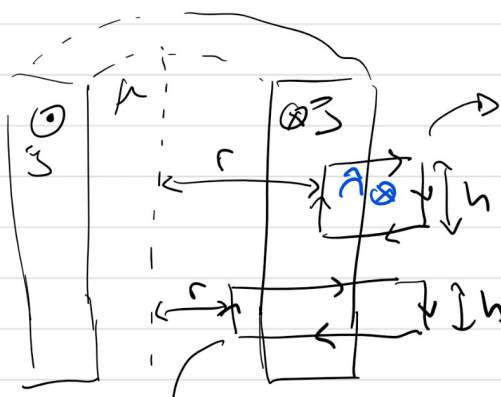
Segundo parcial resuelto (F3B 1c26)

- Resolución breve

- Puede haber más de una manera de resolver!

- 1) a) Mismas simetrías que el solenoide; el cilindro se puede ver como superposición de solenoides
 $\Rightarrow \vec{B} = B(r)\hat{z}$, $\vec{H} = H(r)\hat{z}$ (r de cilíndricas)
 $\gamma \vec{B} = \vec{H} = 0$ afuera

No hay cargas magnéticas así que $\vec{H}$ sólo ve la corriente libre, aplico Ampère:



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

$$H(r)h = \int_0^h dz' \int_r^b dr' \frac{g_0}{r'} = g_0 h \log \frac{b}{r}$$

$$\Rightarrow H = g_0 \log \frac{b}{r} \text{ si } a < r < b$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H(r)h, \quad \iint \vec{J} \cdot \hat{n} dS = h \int_a^r dr' \frac{g_0}{r'} = g_0 h \log \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow H = g_0 \log \frac{b}{a}$$

$$\vec{H} = \begin{cases} g_0 \log \frac{b}{a} \hat{z} & r < a \\ g_0 \log \frac{b}{r} \hat{z} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases} \quad ; \quad \vec{B} = \begin{cases} \mu_0 g_0 \log \frac{b}{a} \hat{z} & r < a \\ \mu_0 g_0 \log \frac{b}{r} \hat{z} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

- b) Con $\vec{M} = M\hat{z}$ no hay cargas magnéticas porque $\rho_m = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0$, $\sigma_m = \vec{M} \cdot \vec{n} = \vec{M} \cdot \hat{r} = 0$

$\Rightarrow$ Las fuentes de $\vec{H}$ son las mismas que en a)

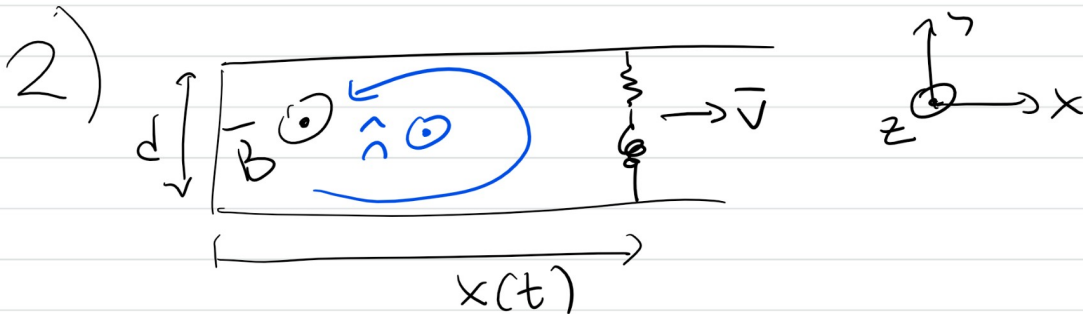
$\Rightarrow \vec{H}$ es igual

$$c) \quad \vec{V}_{so} \cdot \vec{B} = \mu_0 (\vec{I} + \vec{M})$$

$$\vec{E} \cdot \vec{r} = 0, \quad \vec{B} = \mu_0 (g_0 \log \frac{b}{a} + M) \hat{z}$$

Igualo a $\vec{B} = \mu g_0 \log \frac{b}{a} \hat{z}$ y obtengo

$$M = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) g_0 \log \frac{b}{a}$$



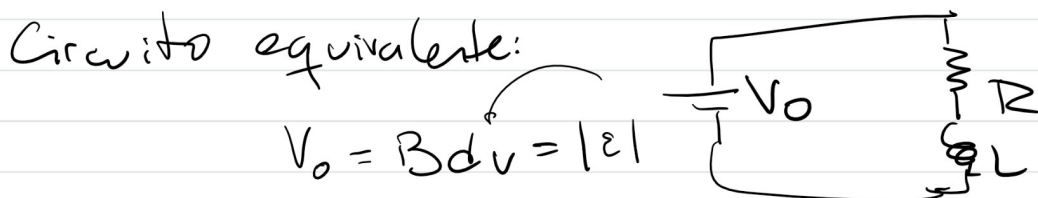
a) Considero sólo el flujo del campo uniforme:

$$\phi(t) = B d x(t) \quad (\text{con la orientación indicada})$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt} = -B dv$$

$\Rightarrow$ Actúa en sentido horario

Circuito equivalente:



$$V_0 = B d v = |\mathcal{E}|$$

b) Ahora tomo el sentido opuesto:



$$V_0 - iR - L \frac{di}{dt} = 0$$

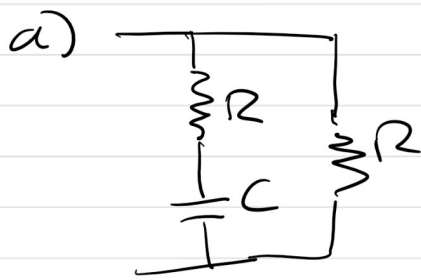
Sol. particular: $i_p = \frac{V_0}{R}$

Sol. homogénea: $i_h = A e^{-\frac{R}{L}t}$

$$i(t) = \frac{V_0}{R} + A e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i(0) = \frac{V_0}{R} + A = 0 \rightarrow i(t) = \frac{V_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

3) $V(t) = V_0 \cos(\omega t) \rightarrow V(t) = V_0 e^{j\omega t}$ en versión compleja



$$Z_R = R \quad Z_C = -\frac{j}{\omega C}$$

Rama izq.: en serie

$$Z_1 = Z_R + Z_C = R - \frac{j}{\omega C}$$

Luego ramas en paralelo: $Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}$

$$= \left(\frac{1}{R - j/\omega C} + \frac{1}{R} \right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{R + R - j/\omega C}{R(R - j/\omega C)} \right)^{-1} = \frac{R(R - j/\omega C)}{2R - j/\omega C}$$

Si quiero simplificar, multiplico y divido por $2R + j/\omega C$:

$$Z_{eq} = \frac{R \left(2R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} - j\frac{R}{\omega C} \right)}{4R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = R \frac{2R^2 \omega^2 C^2 + 1 - jR\omega C}{4R^2 \omega^2 C^2 + 1}$$

b) Se que $i_1 = i_2 + i_3$; defino $i_k = i_{k,0} e^{j\omega t}$ ($k=1,2,3$)

Puedo sacar i_1 con Z_{eq} :

$$V_0 - i_{1,0}(aR + Z_{eq}) = 0$$

$$\rightarrow V_0 = i_{1,0} R \frac{2(1+2a)R^2\omega^2 C^2 + 1 + a - jR\omega C}{4R^2\omega^2 C^2 + 1}$$

$$i_{1,0} = \frac{V_0}{aR + Z_{eq}} = \frac{V_0}{R} \frac{1 + a + 2b^2 + 4ab^2 + jb}{1 + b^2 + a^2 + 4a^2b^2 + 2a + 4ab^2}$$

↪ cuentas

↪ donde $b = \omega RC$

También puedo operar con complejos:

$$i_{1,0} = \frac{V_0}{aR + Z_{eq}} \cdot \frac{aR + Z_{eq}^*}{aR + Z_{eq}^*} = \frac{V_0 (aR + Z_{eq}^*)}{a^2 R^2 + |Z_{eq}|^2 + 2aR \operatorname{Re}(Z_{eq})}$$

↪ más fácil sacar partes real e imaginaria

Puedo sacar i_3 con la malla grande:

$$V_0 - i_{1,0} aR - i_{3,0} R = 0 \rightarrow i_{3,0} = \frac{V_0}{R} - a i_{1,0}$$

$$i_{3,0} = \frac{V_0}{R} \frac{|Z_{eq}|^2 + 2aR \operatorname{Re}(Z_{eq}) - aR Z_{eq}^*}{a^2 R^2 + |Z_{eq}|^2 + 2aR \operatorname{Re}(Z_{eq})}$$

$$= \frac{V_0}{R} \frac{|Z_{eq}|^2 + aR Z_{eq}}{a^2 R^2 + |Z_{eq}|^2 + 2aR \operatorname{Re}(Z_{eq})}$$

$$aR^2 + RZ_{eq}^* - |Z_{eq}|^2 - aRZ_{eq}$$

$$\text{Y luego } i_{2,0} = i_{1,0} - i_{3,0} = \frac{V_0}{R} \frac{aR^2 - |Z_{eq}|^2 - aR Z_{eq} + R Z_{eq}^*}{a^2 R^2 + |Z_{eq}|^2 + 2aR \operatorname{Re}(Z_{eq})}$$

Las corrientes reales son

$$i_k(t) = \operatorname{Re}(i_{k,0}) \cos(\omega t) - \operatorname{Im}(i_{k,0}) \sin(\omega t)$$

$$c) \quad V_{AB} = i_3 R = V_0 \frac{|Z_{eq}|^2 + aR Z_{eq}}{a^2 R^2 + |Z_{eq}|^2 + 2aR \operatorname{Re}(Z_{eq})}$$

$= A; \text{ es real}$

$$V_{AB} = A(|Z_{eq}|^2 + aR Z_{eq}) = |V_{AB}| e^{j\delta}$$

$$\text{con } \tan \delta = \frac{aR \operatorname{Im}(Z_{eq})}{|Z_{eq}|^2 + aR \operatorname{Re}(Z_{eq})}$$