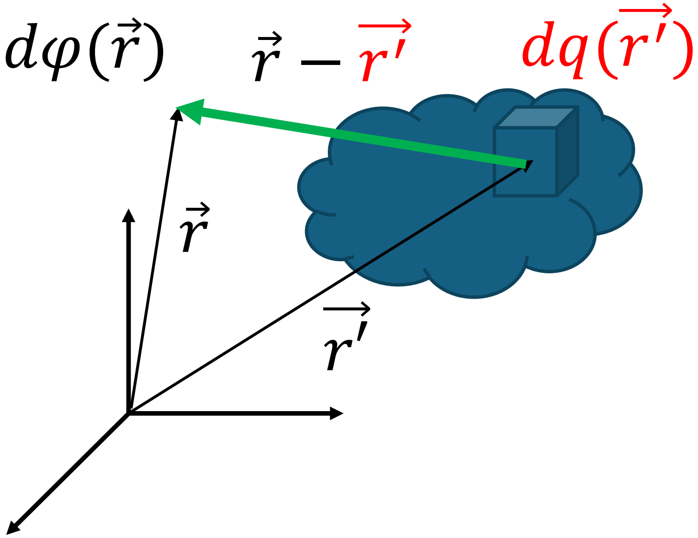
Potencial de una distribución contínua y acotada de carga

- Por estar el campo electrostático y el potencial relacionados por un gradiente, que es un operador lineal, el principio de superposición vale también para la función potencial siempre y cuando tengan el mismo potencial de referencia.

- Si la distribución de cargas es acotada en el espacio, es conveniente poner el potencial de referencia muy lejos ($r=\infty$) y con valor cero.

- Eso hacemos cuando calculamos el potencial de una carga al traer otra desde el infinito

Potencial de una distribución contínua y acotada de carga



- La contribución de un pedacito de carga $dq(\overrightarrow{r'}) = \rho(\overrightarrow{r'})dV'$ al potencial en $\vec{r}$ es:

$$d\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\overrightarrow{r'})}{|\vec{r} - \overrightarrow{r'}|}$$

- Integrando sobre todo el volumen de la carga y tomando el potencial cero en el infinito:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\overrightarrow{r'})dV'}{|\vec{r} - \overrightarrow{r'}|}$$

Otras distribuciones:

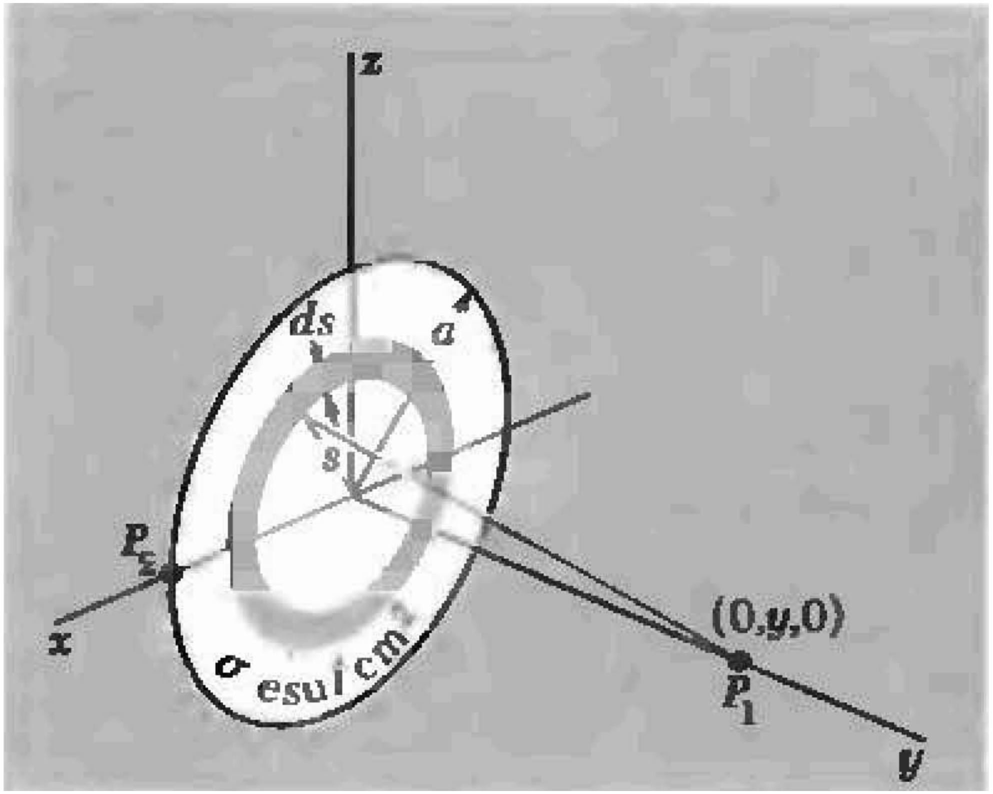
- Distribución lineal: $dq(\overrightarrow{r'}) = \lambda(\overrightarrow{r'})dl'$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(\overrightarrow{r'})dl'}{|\vec{r} - \overrightarrow{r'}|}$$

- Distribución superficial: $dq(\overrightarrow{r'}) = \sigma(\overrightarrow{r'})\, da'$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma(\overrightarrow{r'})\, da'}{|\vec{r} - \overrightarrow{r'}|}$$

Ejemplo: disco cargado uniformemente



- Distribución acotada ✓
  - Radio *a*
  - Grosor despreciable
  - $\sigma = constante \; (\frac{C}{m^2})$

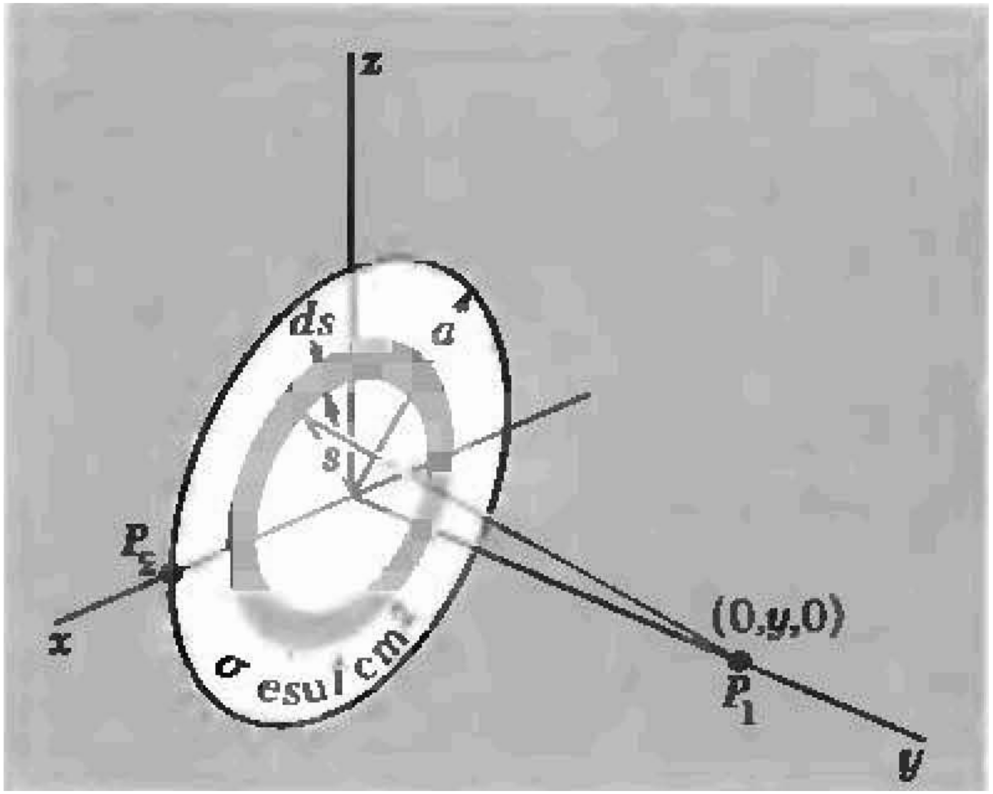
- Calculemos el potencial en el punto P_1 sobre el eje de simetría *y*.

$$dq = \sigma \, da'$$

$$da' = 2\pi s \, ds$$

(da' área de un anillo de radio s y ancho ds).

Ejemplo: disco cargado uniformemente



- La distancia del anillo al P_1 $(0, y, 0)$ es:

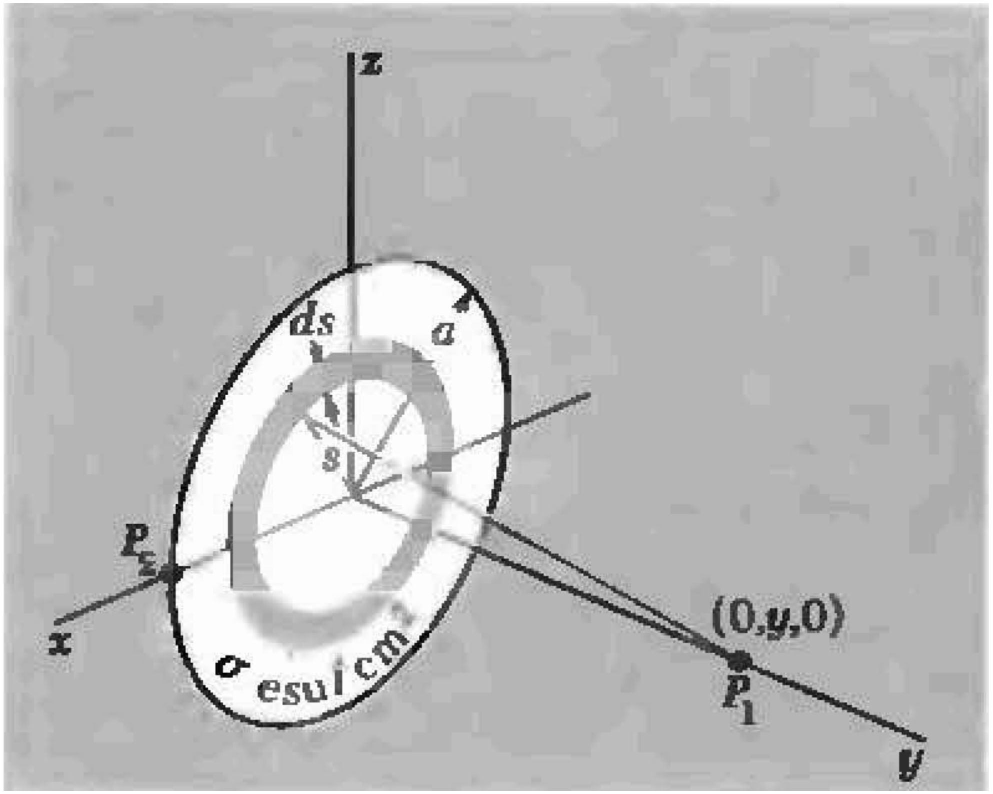
$$\sqrt{y^2 + s^2}$$

- Poniendo el cero de potencial en el infinito

$$\varphi(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\sqrt{y^2 + s^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{\sigma\, 2\pi s\, ds}{\sqrt{y^2 + s^2}}$$

Ejemplo: disco cargado uniformemente



- La integral queda

$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\int_0^a \frac{2s\,ds}{\sqrt{y^2+s^2}} =$$

$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\left[\sqrt{y^2+a^2} - |y|\right]$$

Simetría respecto a $y = 0$

Gradiente del potencial y campo eléctrico

- Dado que la fuerza de Coulomb y el campo electrostático es conservativo, el diferencial de potencial

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

- Es exacto, es decir que se puede escribir (p.ej. en cartesianas) como:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

- Entonces esto implica que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

Ecuaciones de Laplace y Poisson

- Apliquemos a la expresión anterior el operador diverngencia:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}\varphi\right) = -\nabla^2\varphi$$

- Donde ∇^2 es el operador Laplaciano. En en cartesianas:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- Por Ley de Gauss, obtenemos una ecuación diferencial de segundo orden para la función potencial.

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ecuación de Poisson

Ecuaciones de Laplace y Poisson

- La ecuación de Poisson es válida punto a punto. En lugares donde no hay carga, la ecuación es homogénea y se llama ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

- Las funciones que cumplen con esta ecuación se denominan armónicas y tienen propiedades muy interesantes.

El potencial lejos de una distribución

- Volvamos al caso de un disco uniformemente cargado. El potencial a lo largo del eje de simetría daba:

$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{y^2 + a^2} - |y|\right]$$

- Nos interesa saber a qué se parece el potencial a distancias grandes. Para $|y| >> a$ podemos aproximar por serie de Taylor el términ

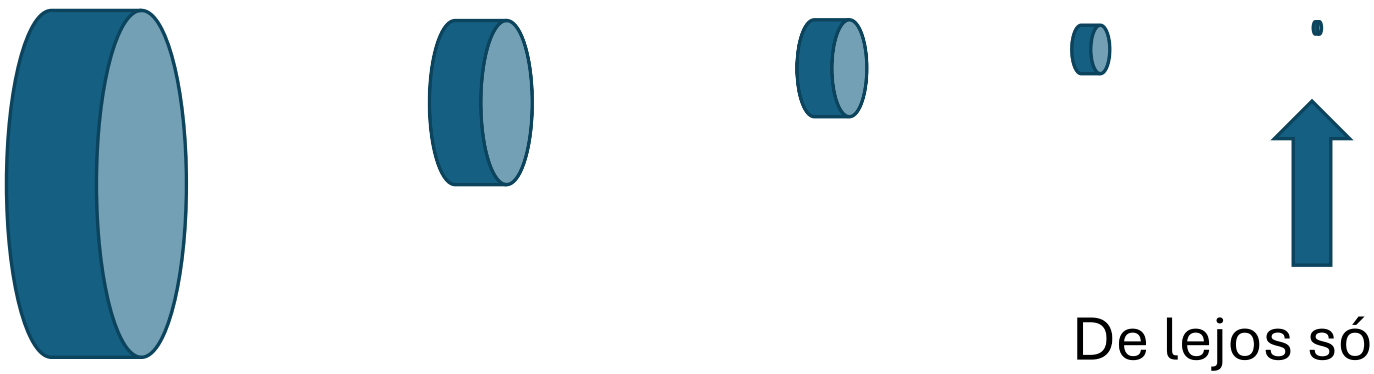
$$\sqrt{y^2 + a^2} - y = y\left[\sqrt{1 + \frac{a^2}{y^2}} - 1\right]$$

$$= y\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{y^2}\right) \cdots - 1\right] \approx \frac{a^2}{2y}$$

El potencial lejos de una distribución

- Reemplazando la aproximación, tenemos

$$\varphi(0,y,0) \approx \frac{a^2\sigma}{4\varepsilon_0 y} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 y} \text{ para } y \gg a$$



$q = \sigma\pi a^2$

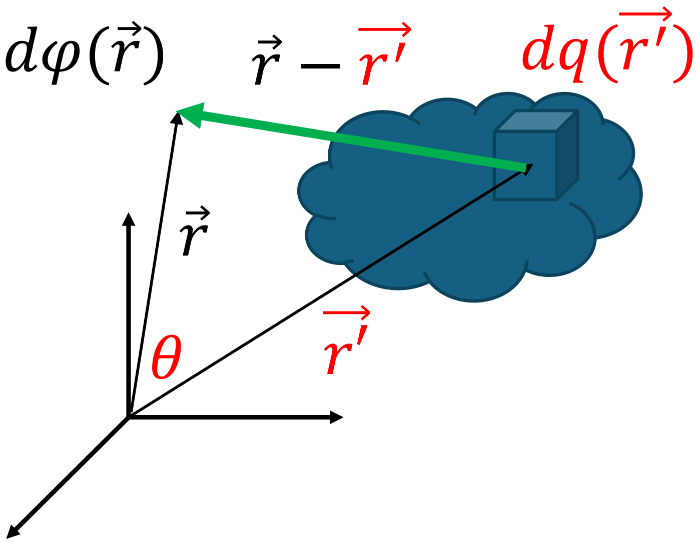
De lejos sólo se ve
una carga puntual

Momentos de una distribución de carga

- Un átomo o molecula consta de cargas en disposiciones complejas en volúmenes del orden de 10^{-24} cm.

- ¿Qué aspectos de la estructura de la carga son los más importantes cuando vemos el potencial/campo a grandes distancias de las distribuciones de carga?

Momentos de una distribución de carga



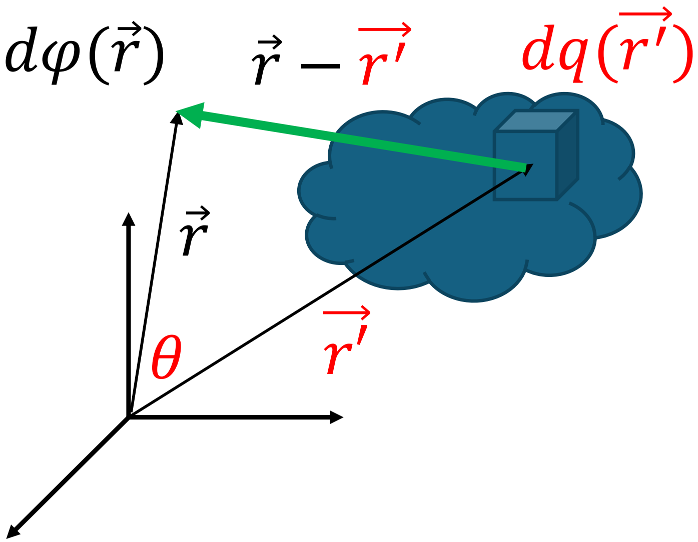
- Supongamos una distribución acotada $\rho\,(\overrightarrow{r'})$ y un punto $\vec{r}$ exterior a la distribución.

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\overrightarrow{r'})dv'}{\left|\vec{r} - \overrightarrow{r'}\right|}$$

- Tomemos la distancia R tal que:

$$R = \left|\vec{r} - \overrightarrow{r'}\right|$$

Momentos de una distribución de carga



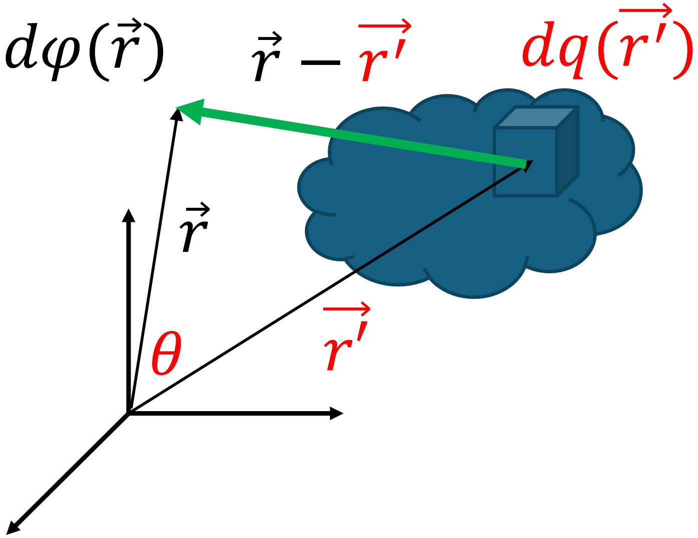
- Reescribiendo tenemos:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\overrightarrow{r'})dv'}{R}$$

- Expresamos R en función de las distancias r y r' desde el origen del sistema de coordenadas. Por el teorema del coseno

$$R = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta]^{1/2}$$

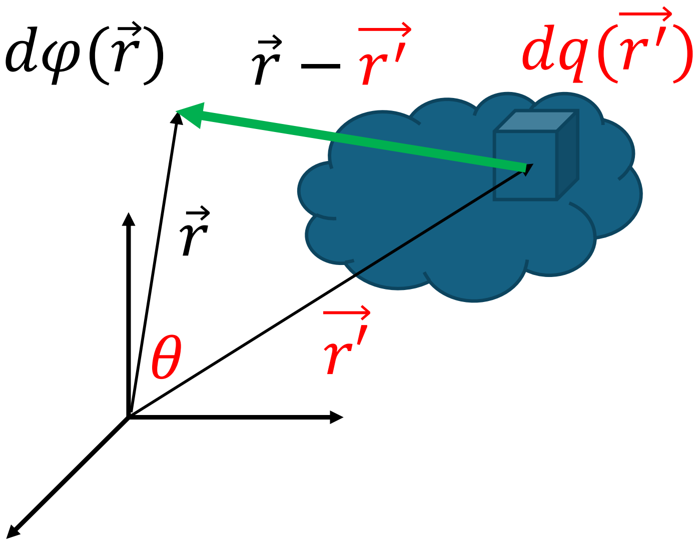
Momentos de una distribución de carga



- La idea es ver qué pasa cuando $r >> r'$. Veamos un poco el factor R^{-1}:

$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta]^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r}\cos\theta\right)\right]^{-1/2}$$

Momentos de una distribución de carga



- La idea es ver qué pasa cuando $r >> r'$. Veamos un poco el factor R^{-1}:

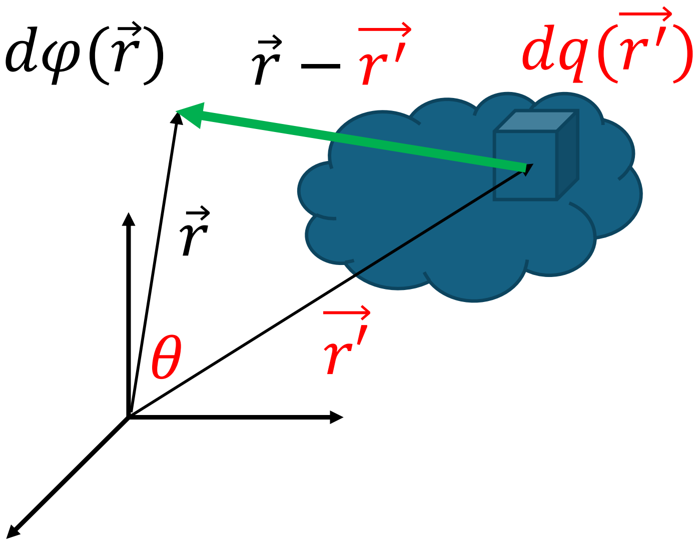
$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta]^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r}\cos\theta\right)\right]^{-1/2}$$

- Podemos hacer el desarrollo en Taylor de R^{-1} para $r'/r << 1$. Tomando el desarrollo

$$(1+\delta)^{-1/2} = 1 - \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{3}{8}\delta^2 \ \ldots$$

para $\delta \ll 1$

Momentos de una distribución de carga



- Tomando esta expansión el factor R^{-1} queda:

$$= \frac{1}{r}\left[1 + \frac{r'}{r}\cos\theta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 (3\cos^2\theta - 1) + \begin{pmatrix}\text{términos de}\\ \text{grado superior}\end{pmatrix}\right]$$

más grande >>>>>>>>>>>> más chico

- Entonces, reemplazando en $\varphi(\vec{r})$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\underbrace{\int \rho\, dv'}_{K_0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\underbrace{\int r'\cos\theta\,\rho\, dv'}_{K_1}$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\underbrace{\int r'^2(3\cos^2\theta - 1)\rho\, dv'}_{K_2} + \cdots$$

Momentos de una distribución de carga

- Entonces $\varphi(\vec{r})$ lejos de la distribución puede escribirse como una serie de términos de importancia decreciente (fijarse el exponente de 1/r)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\underbrace{\int \rho\, dv'}_{K_0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\underbrace{\int r' \cos\theta\, \rho\, dv'}_{K_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\underbrace{\int r'^2(3\cos^2\theta - 1)\rho\, dv'}_{K_2} + \cdots$$

- La clave es calcular los coeficientes K_0, K_1, K_2, etc. Cada término se denomina momento.

Momentos de una distribución de carga

- ¿Hace falta calcular todos los K_i?
- No! El comportamiento del potencial a grandes distancias de la fuente estará determinado por el **<u>primer término no nulo</u>** de la serie:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \cdots\right]$$

Los coeficientes K_0 y K_1

- $K_0 = \int \rho(\overrightarrow{r'})\, dv'$ es simplemente la carga total de la distribución (da cero para moléculas y átomos neutros).

- Si $K_0 = 0$, calcularemos

$$K_1 = \int r' \cos\theta \, \rho(\overrightarrow{r'}) dv'$$

Momento dipolar

Los coeficientes K_0 y K_1

- Para simplificar esta expresión consideremos el vector

$$\vec{p} = \int \overrightarrow{r'}\,\rho\left(\overrightarrow{r'}\right)dv'$$

- Entonces:

$$\hat{r}\cdot\vec{p} = \hat{r}\cdot\int \overrightarrow{r'}\,\rho\left(\overrightarrow{r'}\right)dv' = \int \hat{r}\cdot\overrightarrow{r'}\,\rho\left(\overrightarrow{r'}\right)dv' =$$
$$\int r'\cos\theta\,\rho\left(\overrightarrow{r'}\right)dv' = K_1$$

- Por lo tanto: $K_1 = \hat{r}\cdot\vec{p}$

Los coeficientes K_0 y K_1

- Resumiendo, para un punto en dirección $\hat{r}$ y a una distancia r de una distribución acotada $\rho\left(\overrightarrow{r'}\right)$, el potencial viene dado por:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{r} + \frac{\hat{r}\cdot\vec{p}}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \cdots.\right]$$

- Donde $Q = K_0 = \int \rho\left(\overrightarrow{r'}\right) dv'$ y $\vec{p} = \int \overrightarrow{r'}\, \rho\left(\overrightarrow{r'}\right) dv'$