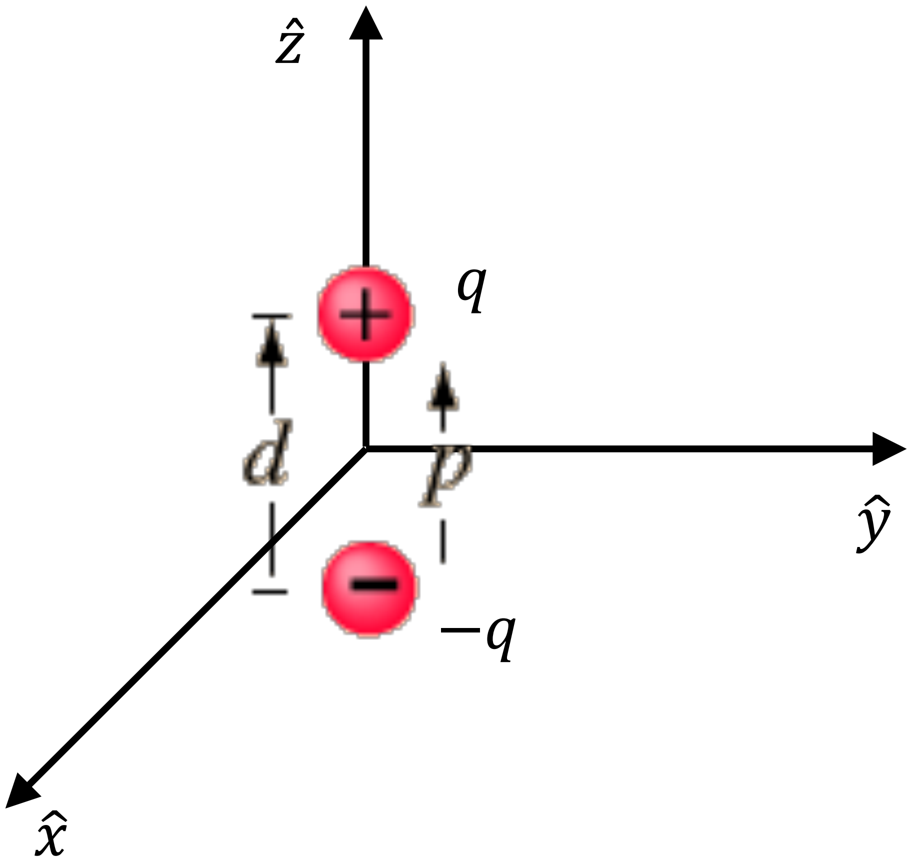
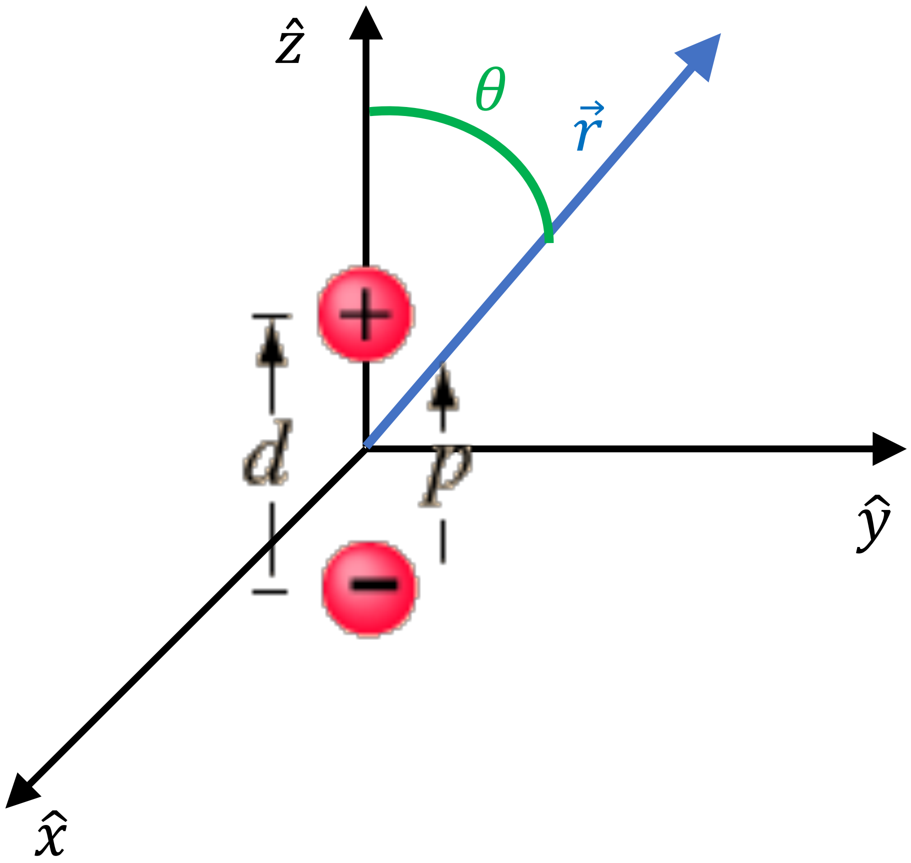
Ejemplo: Potencial lejano de un dipolo



- Dos cargas puntuales $\pm q$ en $\mathrm{z} = \mp\frac{d}{2}$
- $K_0 = 0$
- Veamos K_1. Para cargas puntuales

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{r'}_i \, q_i$$

Ejemplo: Potencial lejano de un dipolo



- Centro del SC equidistante de las cargas:

$$\vec{p} = \frac{d}{2} q\hat{z} + \left(-\frac{d}{2}\right)(-q)\hat{z} = qd\ \hat{z}$$

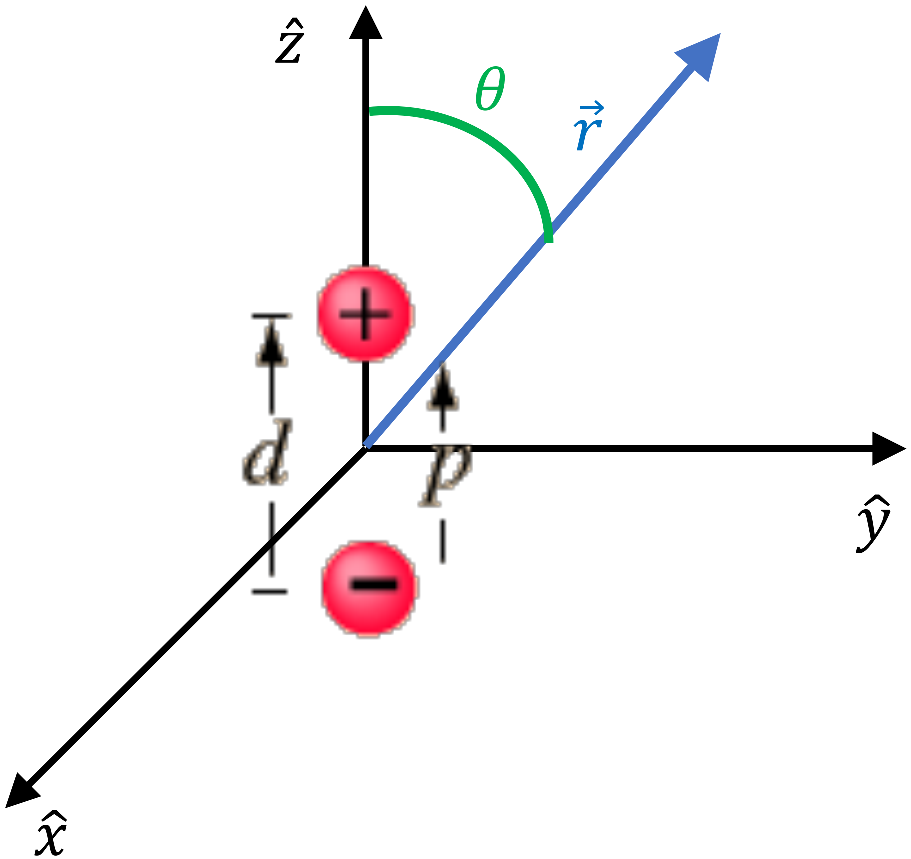
- Por lo tanto

$$K_1 = \hat{r} \cdot \vec{p} = qd\cos\theta$$

- Y entonces, lejos del dipolo

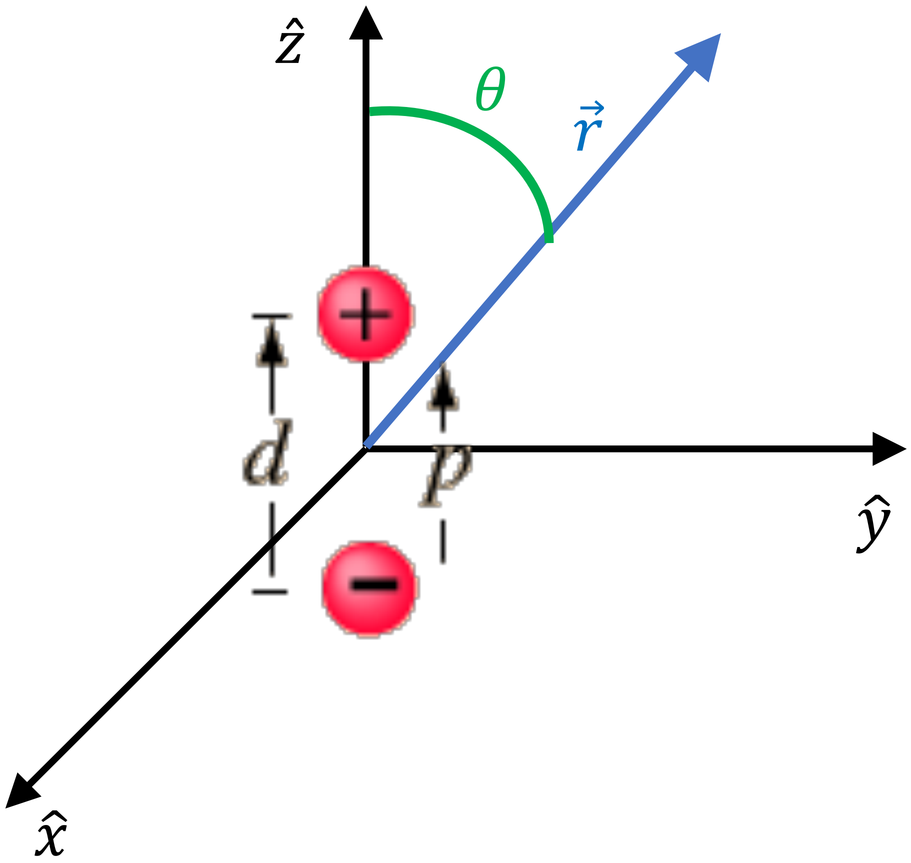
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{K_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd\cos\theta}{r^2}$$

Ejemplo: Campo lejano de un dipolo



- Calculemos el campo $\vec{E}$
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$
- Tanto el potencial como el campo son simétricos alrededor del eje $\hat{z}$.
- Podemos calcular el potencial en cartesianas en algún plano que contenga al eje z. Por ejemplo el plano xz

Ejemplo: Campo lejano de un dipolo



- En el plano xz, tenemos

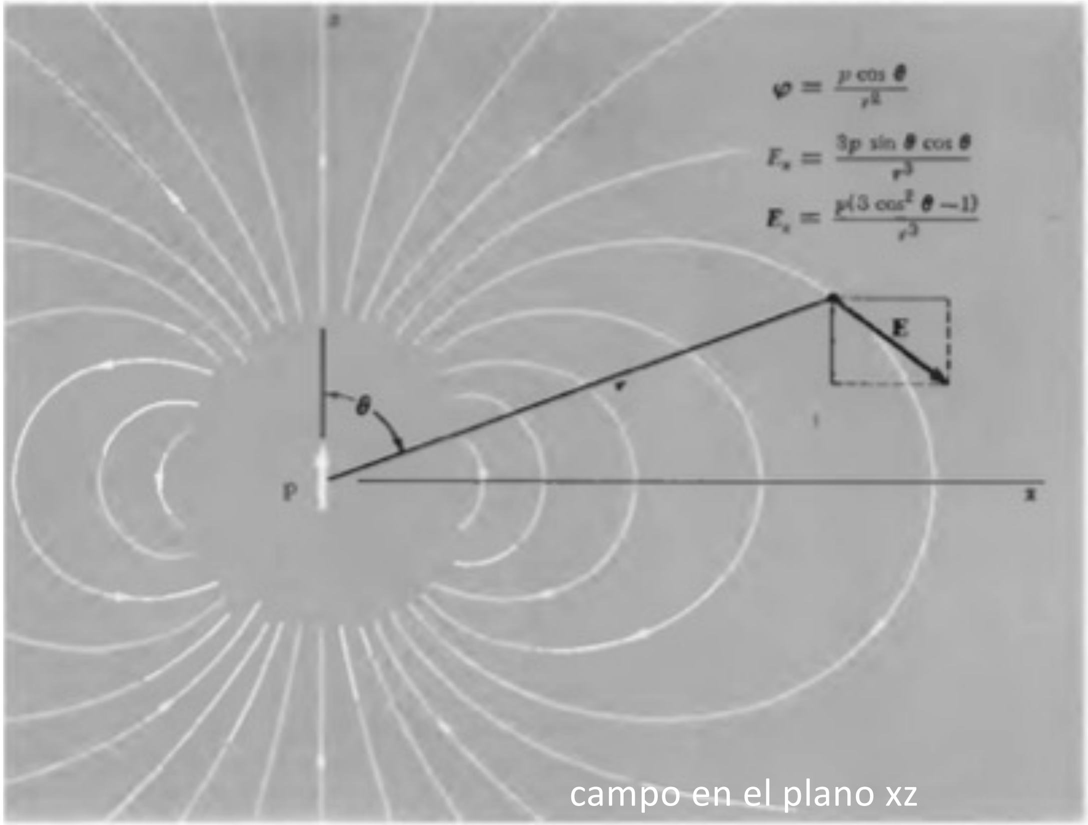
$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

$$r = \sqrt{x^2 + z^2}$$

- Entonces, en el plano xz el potencial en cartesianas se escribe:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{pz}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$

Ejemplo: Campo lejano de un dipolo



campo en el plano xz

- Calculemos el campo en el plano xz

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z}\right]$$

- Sabiendo además que:

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

- En el plano xz, $E_y = 0$ y entonces:

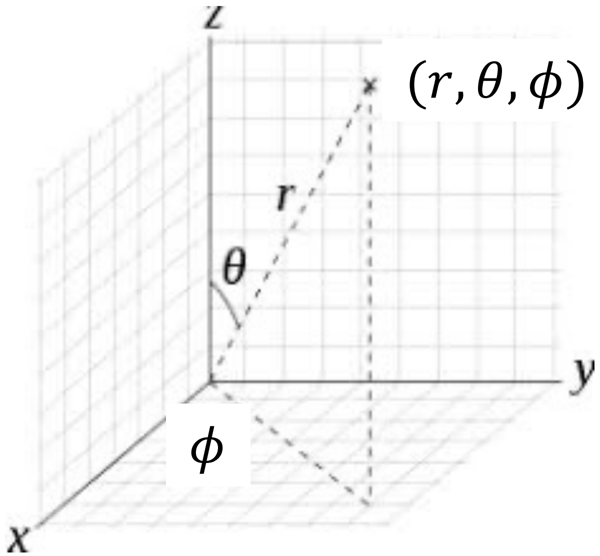
Ejemplo: Campo lejano de un dipolo

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3pxz}{(x^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3p \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{r^3}$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p \left[\frac{3z^2}{(x^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p(3\cos^2\theta - 1)}{r^3}$$

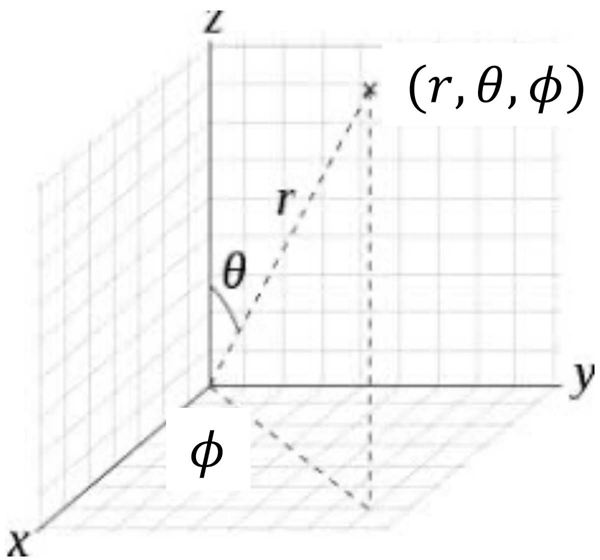
Ejemplo: Campo lejano de un dipolo



- También podemos hacer el cálculo del campo en esféricas.
- Esta vez la solución vale para todo el espacio
- El gradiente en esféricas es:

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\ \hat{\theta}$$

Ejemplo: Campo lejano de un dipolo



- Usando

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{K_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

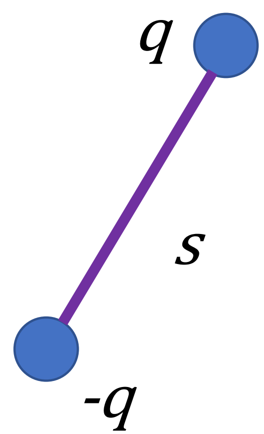
- El campo en esféricas es:

$$\vec{E} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^3}\,\hat{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}\,\hat{\theta}$$

- Poloidal y decae como r^{-3}

Torque sobre un dipolo en un campo externo

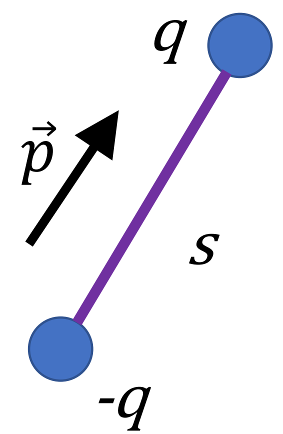
- Supongamos un dipolo de dos cargas opuestas de módulo q separadas por una varilla rígida no conductora de largo s.



Torque sobre un dipolo en un campo externo

- Supongamos un dipolo de dos cargas opuestas de módulo q separadas por una varilla rígida no conductora de largo s.

- El momento dipolar es simplemente $\vec{p} = qs\,\hat{p}$.

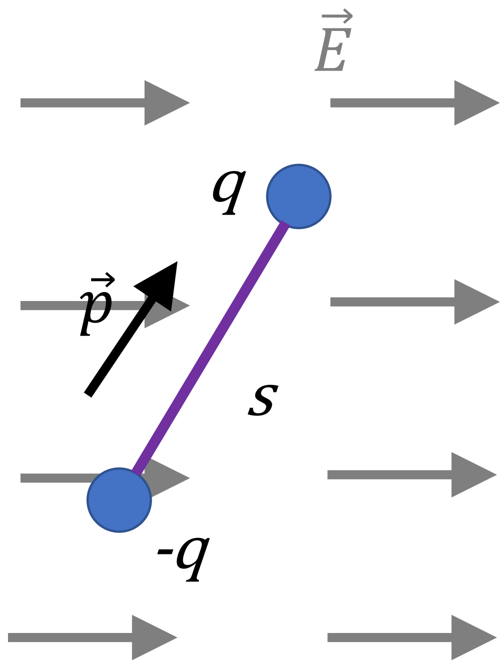


Torque sobre un dipolo en un campo externo

- Supongamos un dipolo de dos cargas opuestas de módulo q separadas por una varilla rígida no conductora de largo s.

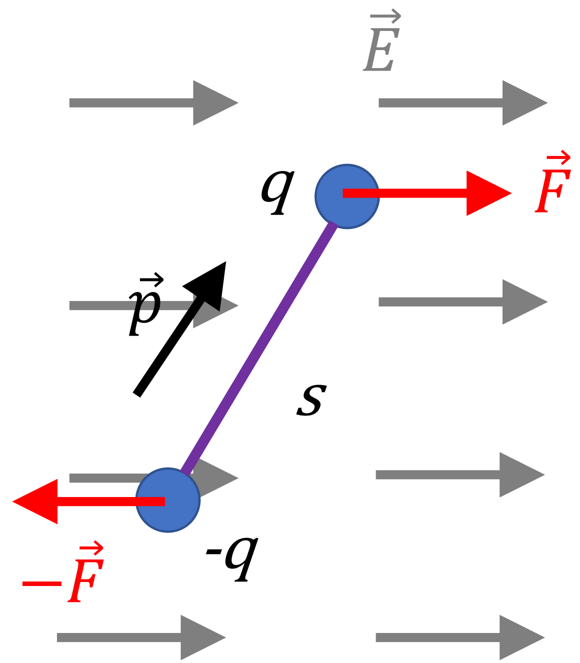
- El momento dipolar es simplemente $\vec{p} = qs\,\hat{p}$.

- Nos interesa saber qué pasa cuando el dipolo se encuentra en un campo unifome $\vec{E}$ (no nos interesa el campo del dipolo).



Torque sobre un dipolo en un campo externo

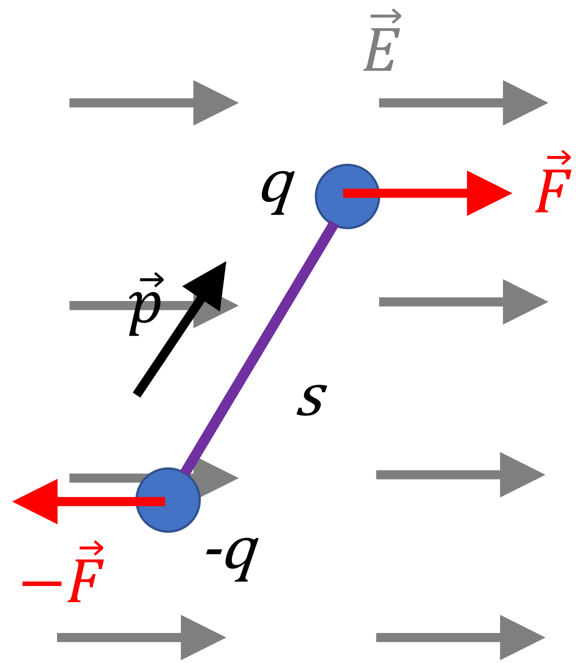
- Las cargas del dipolo sentirán fuerzas opuestas de módulo $F = qE$



Torque sobre un dipolo en un campo externo

- Las cargas del dipolo sentirán fuerzas opuestas de módulo $F = qE$

- La fuerza resultante será nula, con lo cual el dipolo entero no se va a acelerar.

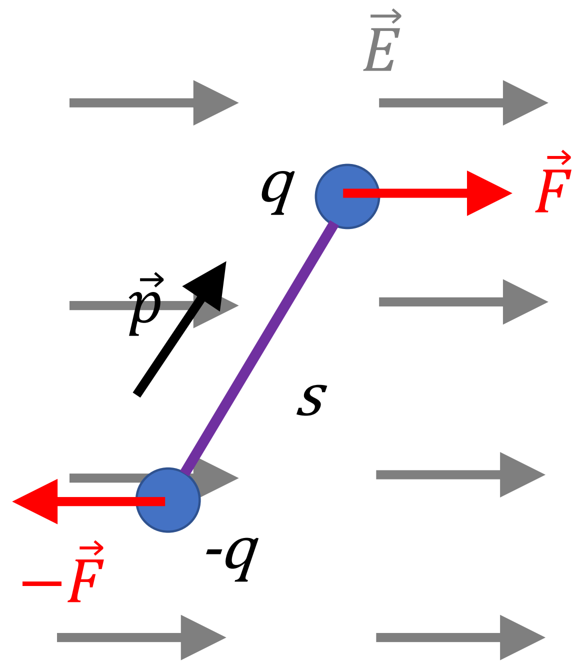


Torque sobre un dipolo en un campo externo

- Las cargas del dipolo sentirán fuerzas opuestas de módulo $F = qE$

- La fuerza resultante será nula, con lo cual el dipolo entero no se va a acelerar.

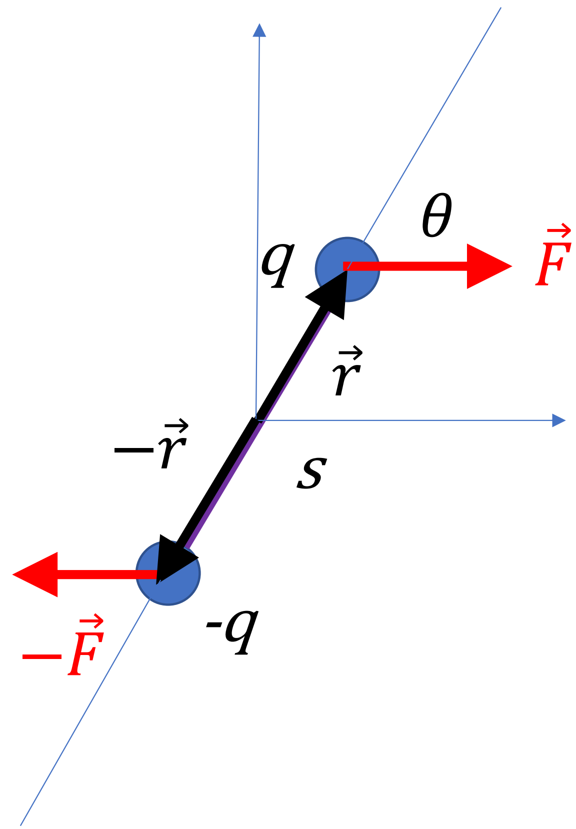
- Sin embargo, si el dipolo no está alineado con el campo habrá un torque



Torque sobre un dipolo en un campo externo

- El torque es

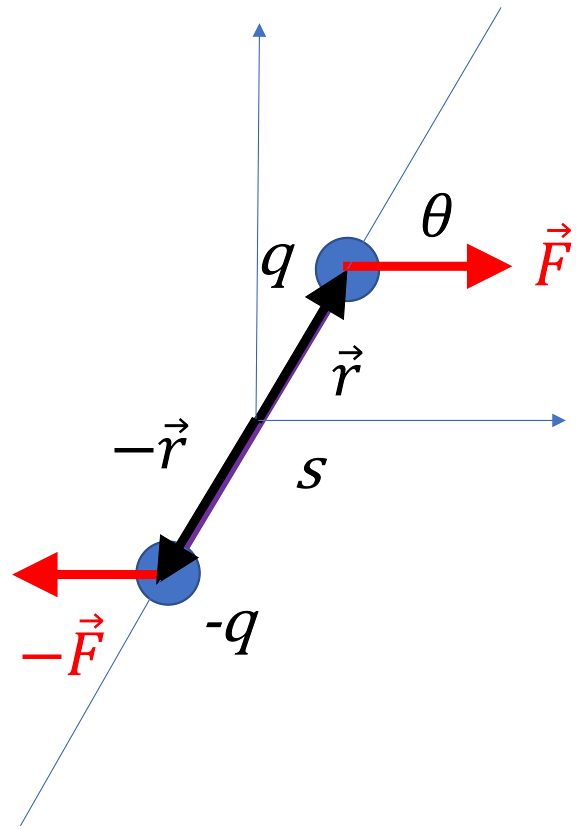
$$\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F} + \left(-\vec{r}\times\left(-\vec{F}\right)\right) = 2\,\vec{r}\times\vec{F}$$



Torque sobre un dipolo en un campo externo

- El torque es
$$\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F} + \left(-\vec{r}\times\left(-\vec{F}\right)\right) = 2\,\vec{r}\times\vec{F}$$

- Como $|\vec{r}| = \frac{s}{2}$, $\vec{N}$ apunta hacia adentro de la pantalla y tiene módulo $\left|\vec{N}\right| = sqE\,|\sin\theta\,|$.

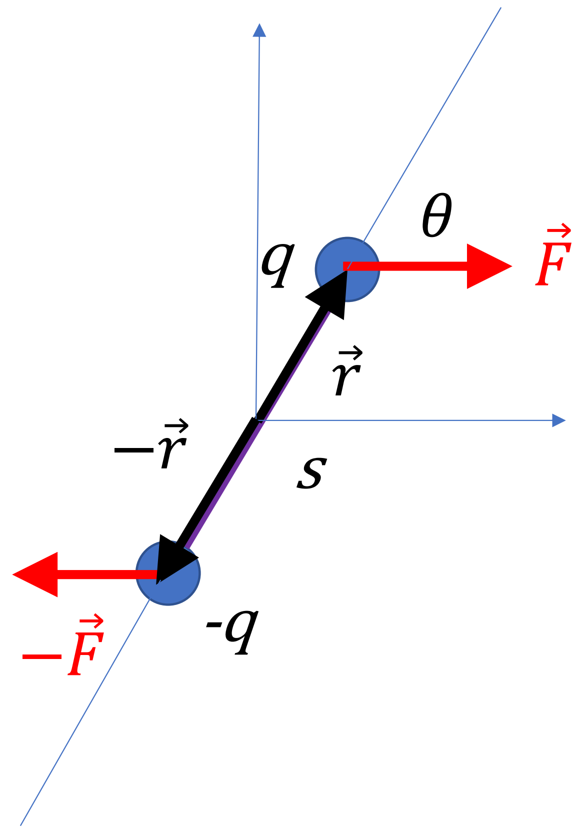


Torque sobre un dipolo en un campo externo

- El torque es
$$\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F} + \left(-\vec{r}\times\left(-\vec{F}\right)\right) = 2\,\vec{r}\times\vec{F}$$

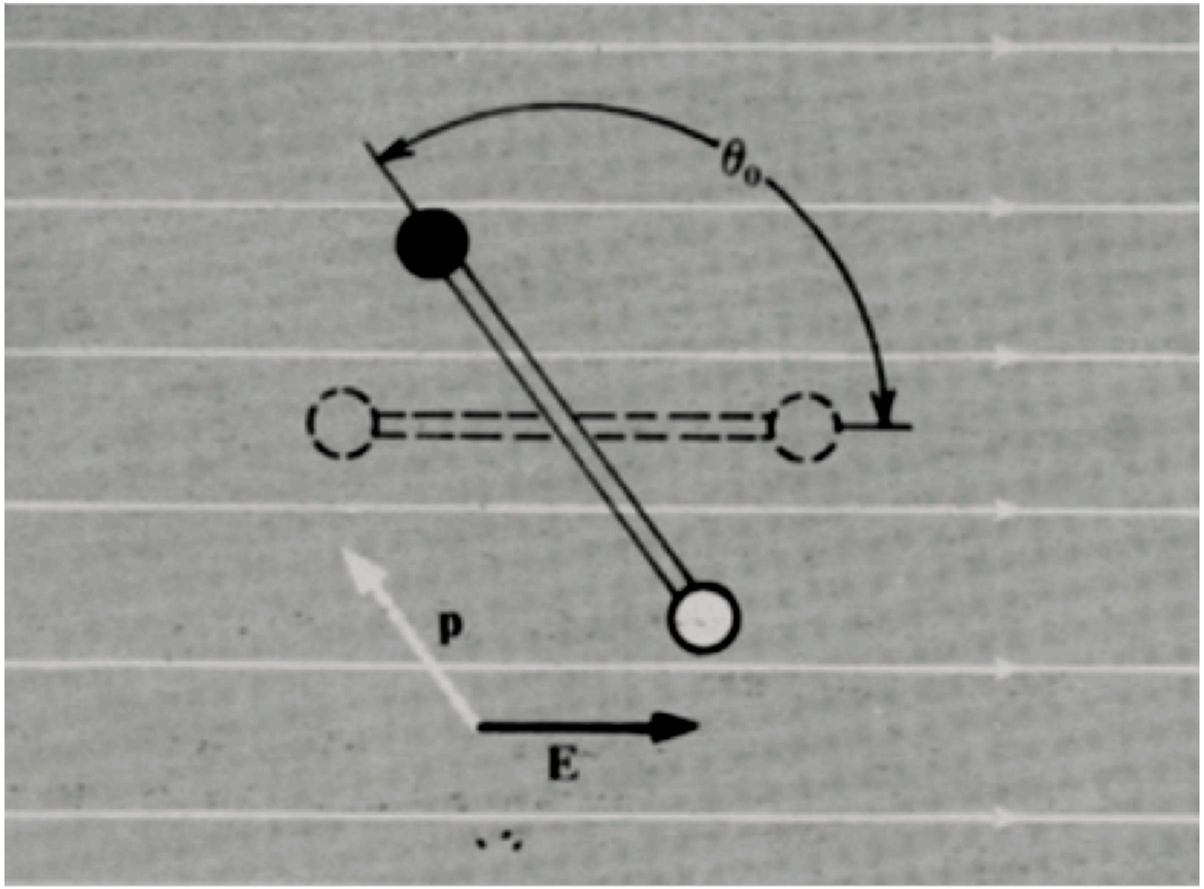
- Como $|\vec{r}| = \frac{s}{2}$, $\vec{N}$ apunta hacia afuera de la pantalla y tiene módulo $\left|\vec{N}\right| = sqE\,|\sin\theta\,|$.

- Pero eso simplemente es
$$\vec{N} = \vec{p}\times\vec{E}$$



Torque sobre un dipolo en un campo externo

Esto quiere decir que un dipolo en medio de un campo eléctrico uniforme va a tender a alinearse con él a fin de adoptar la configuración de mínima energía



Conductores en campos electrostáticos

Tipos de materiales eléctricos

- Conductores: Alta movilidad de portadores de carga (en sólidos, electrones). Las cargas sobre ellos se pueden mover libremente como respuesta a los campos eléctricos

- Semiconductores: movilidad de portadores de carga limitada a ciertas condiciones.

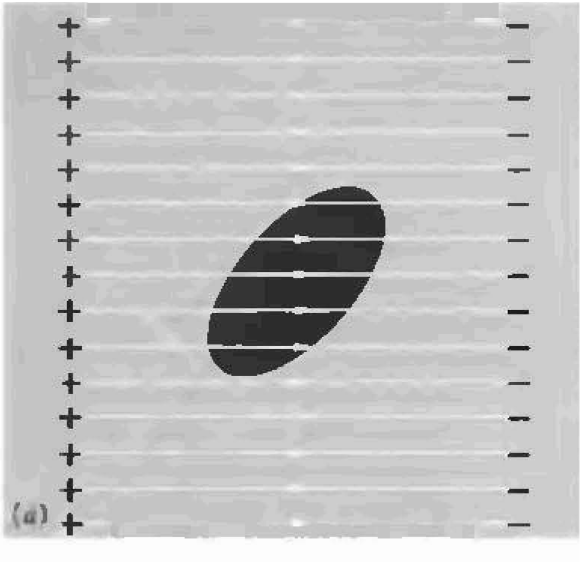
- Aislantes: baja movilidad de portadores de carga. Las cargas no se mueven a través de ellos

Conductores en electrostática

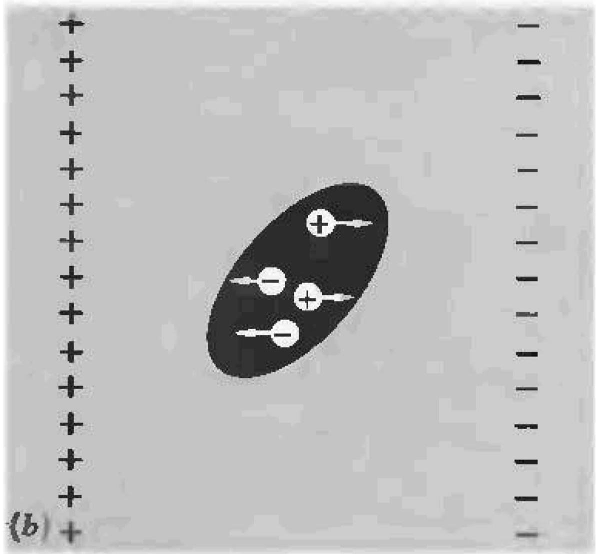
- Las cargas pueden reacomodarse libremente en un conductor.
- Este reacomodamiento se realiza de acuerdo a ciertas reglas.
- En electrostática, vamos a considerar las propiedades de los conductores una vez que se haya alcanzado el estado estacionario (es decir, cuando las cargas ya se hayan acomodado).

Aislantes y conductores en campo externo uniforme

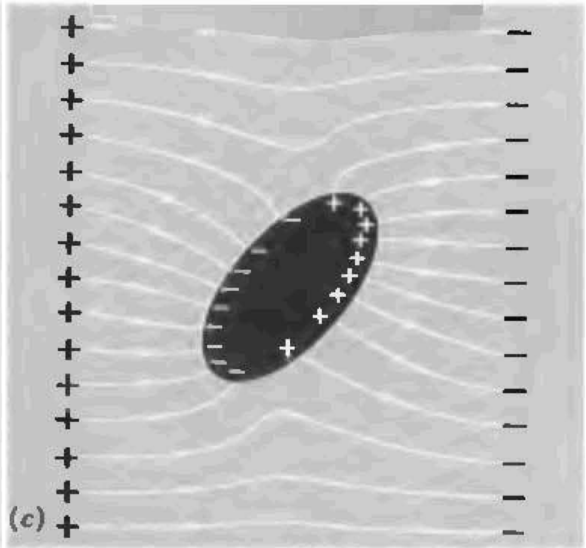
Aislante: el campo en el interior es prácticamente el del exterior



Conductor: las cargas se van a la superficie y dejan campo nulo en el interior



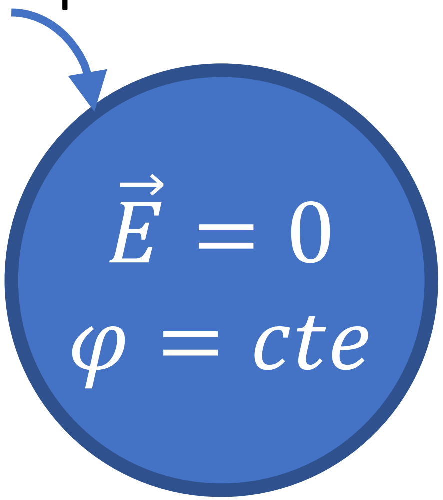
Transitorio



Estacionario

Propiedades de los conductores en estado estacionario

Cargas en la superficie

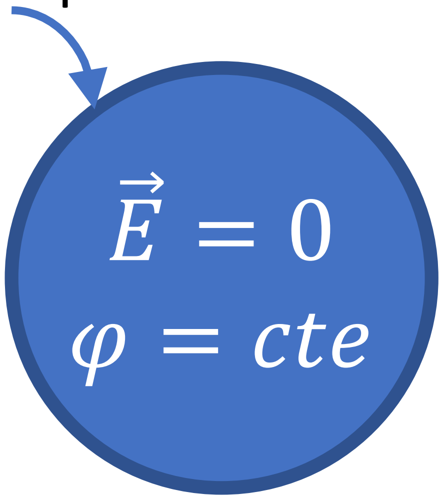


- En el interior de los conductores en estado estacionario, el campo eléctrico es nulo.

- El exceso de carga se ubica en el borde físico del conductor.

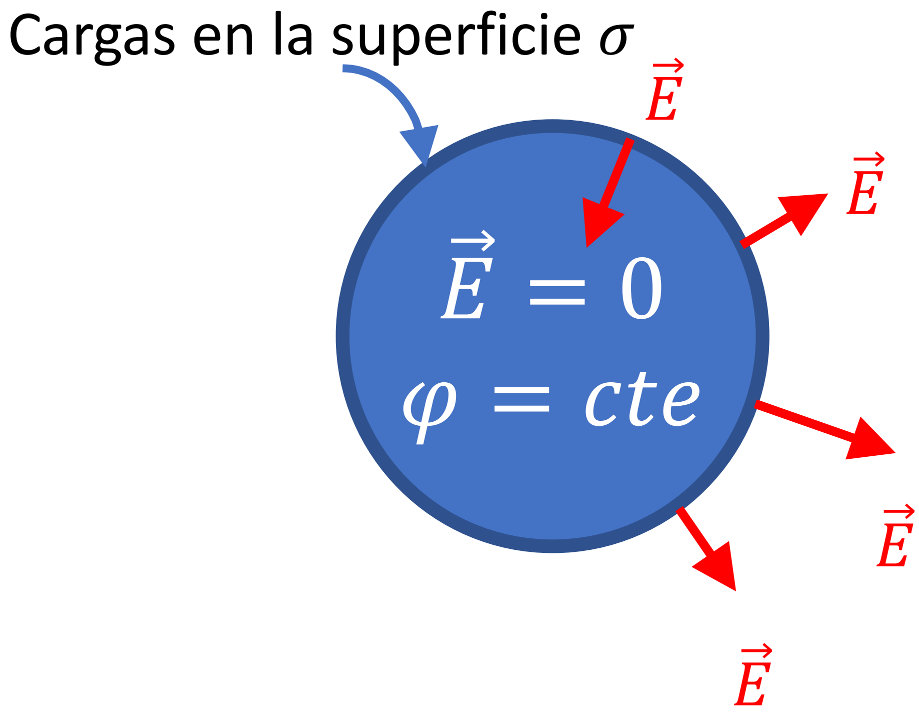
Propiedades de los conductores en estado estacionario

Cargas en la superficie σ



- Si el campo eléctrico es nulo en el interior del conductor, el potencial ahí es constante al igual que en su superficie.

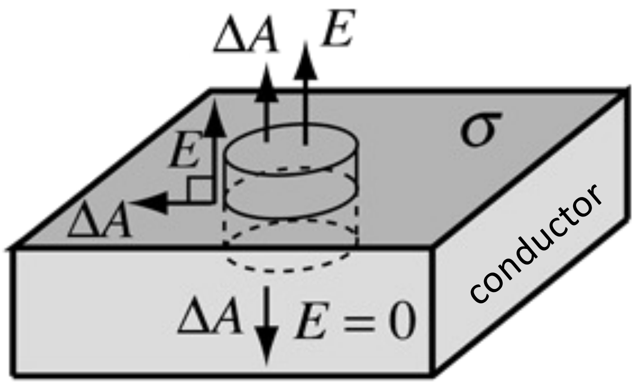
Propiedades de los conductores en estado estacionario



- Si el campo eléctrico es nulo en el interior del conductor, el **potencial ahí es constante al igual que en su superficie**.

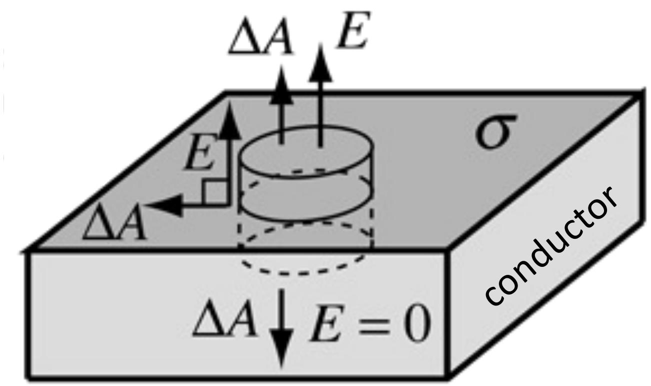
- Como la **superficie es equipotencial**, el **campo en esa superficie sólo puede ser normal a ella**.

Discontinuidad de $\vec{E}$ en la superficie



- El salto de un campo eléctrico nulo en el interior de un conductor a uno no nulo y normal en su superficie se debe a la presencia de la carga acumulada ahí.
- Apliquemos la Ley de Gauss en un cilindro alineado con la normal a la superficie de un conductor donde hay una carga superficial de densidad σ (C/m^2)

Discontinuidad de $\vec{E}$ en la superficie



- El único flujo que sobrevive es el que se da a través de la tapa externa de área ΔA

$$\underset{\text{cilindro}}{\oiint} \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = \frac{carga\ encerrada}{\epsilon_0}$$

$$E\ \Delta A = \frac{\sigma \Delta A}{\epsilon_0}$$

$$E\ = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Conductores (estado estacionario)

- Campo eléctrico:
  - Nulo en su interior
  - En la superficie, es normal a ella.
  - La intensidad depende de la densidad superficial de carga local
- Superficie es equipotencial
- Carga se ubica sobre superficie

Campo eléctrico en conductores

- De los puntos anteriores se deduce que la carga total Q sobre la superficie de un conductor S se puede escribir como:

$$Q = \int \sigma \, da = \epsilon_0 \int \vec{E} \cdot \overrightarrow{da}$$

¡ Importante !
$\vec{E}$ es el campo debido a todas las cargas,
las de la superficie, más las lejanas. Es σ la que se acomoda para que la relación de arriba se cumpla