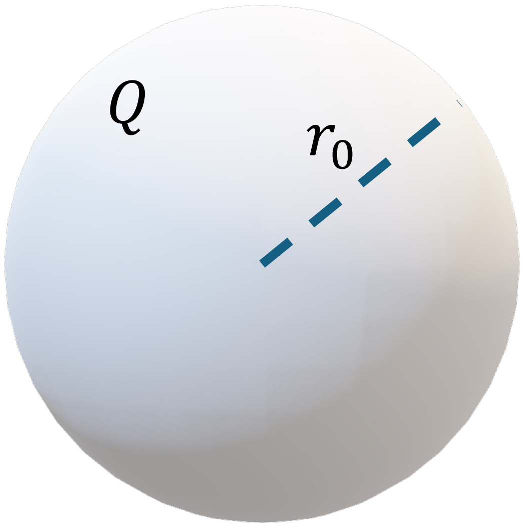
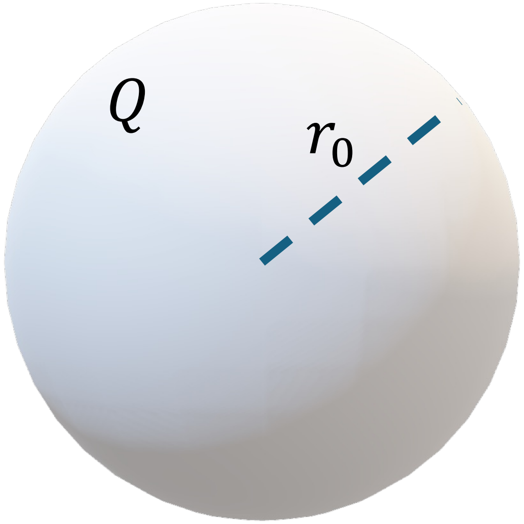
Esfera conductora cargada



- Supongamos una esfera maciza conductora de radio r_0.
- Sobre ella se ubica una carga Q conocida.
- Hallar el campo y el potencial en todo el espacio
- ¿Cómo se distribuye la carga en su superficie?

Esfera conductora cargada



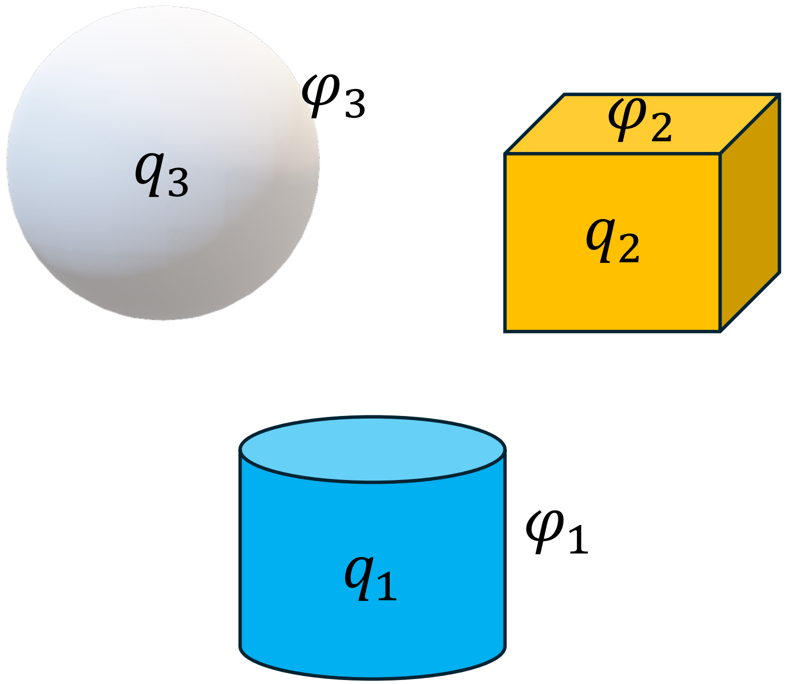
- Al exterior de la esfera $r > r_0$
$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2};\ \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$
- En el interior de la esfera $r < r_0$:
$$\vec{E}(r) = 0;\ \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$
- En su superficie;
$$\vec{E}(r_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r_0^2};\varphi(r_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$
- $\sigma = \frac{Q}{4\pi r_0^2}$

Problema electrostático general: Teorema de unicidad

- Podemos plantear el problema en función del potencial $\varphi(\vec{r})$.
- Para cualquier punto fuera del conductor (donde no hay carga), φ cumple la ecuación de Laplace:
$$\nabla^2\varphi = 0$$
- El problema es hallar una $\varphi(\vec{r})$ que cumpla la ecuación anterior y la condición en la superficie del conductor (además de la condición en el infinito si se trata de una distribución acotada).
- Entonces nos preguntamos: si damos condiciones de contorno, ¿el problema del potencial tiene una solución y en ese caso es élla la única solución?

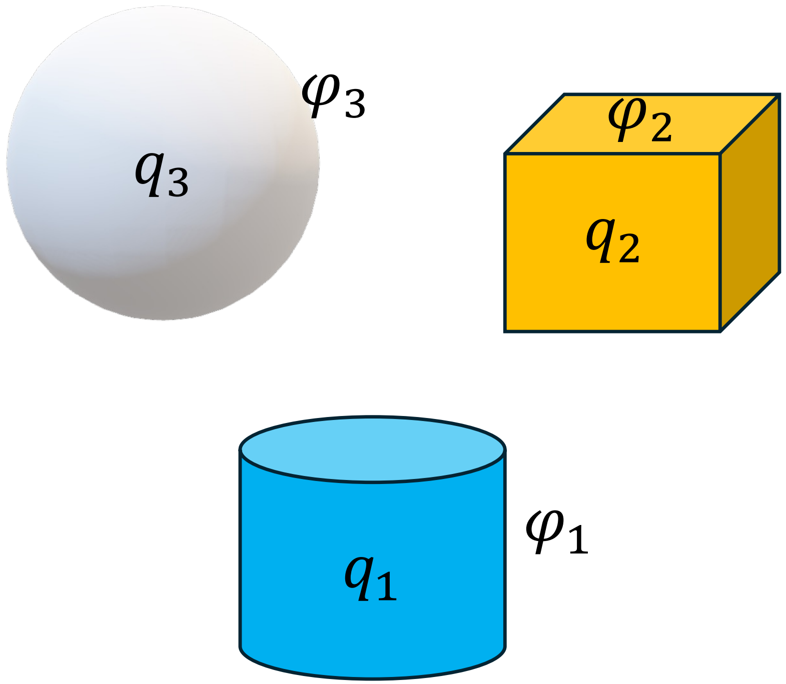
Problema electrostático general: Teorema de unicidad

- Supongamos el siguiente sistema y que la solución de la ecuación de Laplace $\varphi(\vec{r})$ con las condiciones de contorno en las superficies de los conductores existe.
- Supongamos que existe otra función $\psi(\vec{r})$ que también cumple en ser solución de Laplace y las condiciones de contorno.



Problema electrostático general: Teorema de unicidad

- Como la ecuación de Laplace es lineal, esto implica que, de haber dos soluciones, también lo es su combinación lineal:
- Consideremos, por ejemplo, la función:
$$W(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) - \psi(\vec{r})$$
- Es trivial ver que $W(\vec{r})$ no cumple con las condiciones de contorno ya que por definición en esas superficies $W = 0$
- Entonces se concluye que para no ser solución de otro problema, $W \equiv 0$ es decir: $\varphi(\vec{r}) = \psi(\vec{r})$



Problema electrostático general: Teorema de unicidad

- Entonces conlcluimos que la solución al problema

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

con sus correspondientes condiciones de contorno **es única**

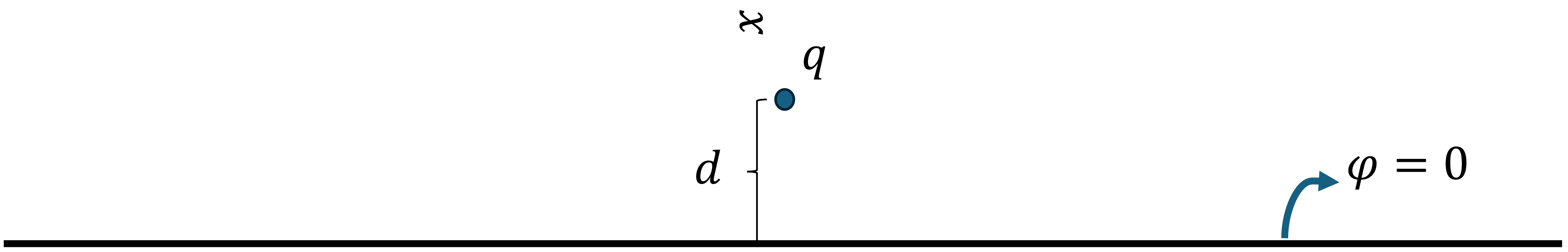
- Como corolario podemos decir que si la superficie de un conductor que no tiene cargas en su interior es una equipotencial, entonces el campo dentro de él es cero.

- Esta unicidad se valida también para la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

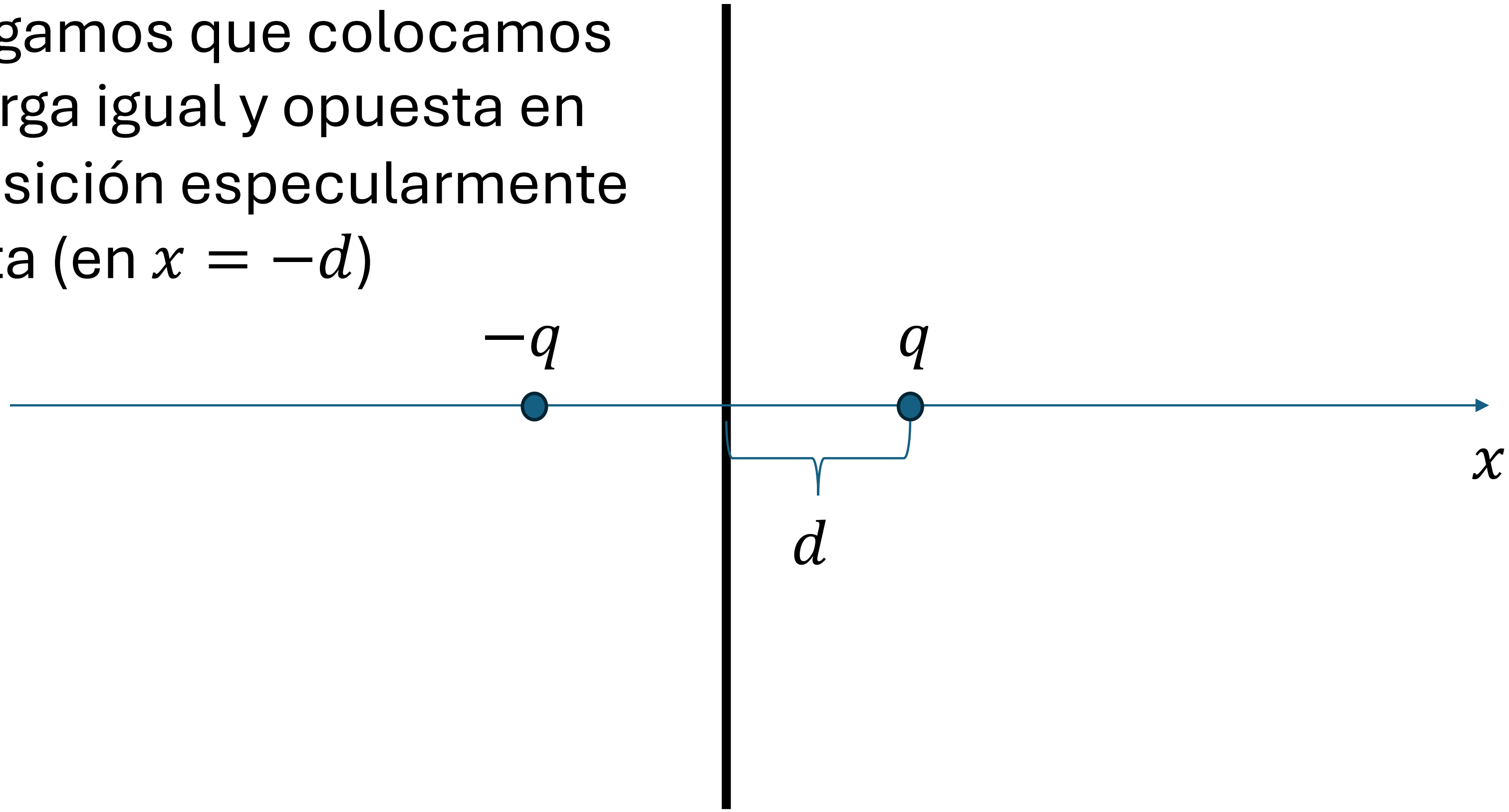
Método de las imágenes

- Sirve para obtener la función potencial y el campo eléctrico en configuraciones de geometría sencilla que involucran cargas, conductores y campos.
- Veamos el problema de una carga puntual q a una distancia d de un conductor plano infinito donde el potencial es nulo.
- Queremos calcular el potencial φ para $x > 0$



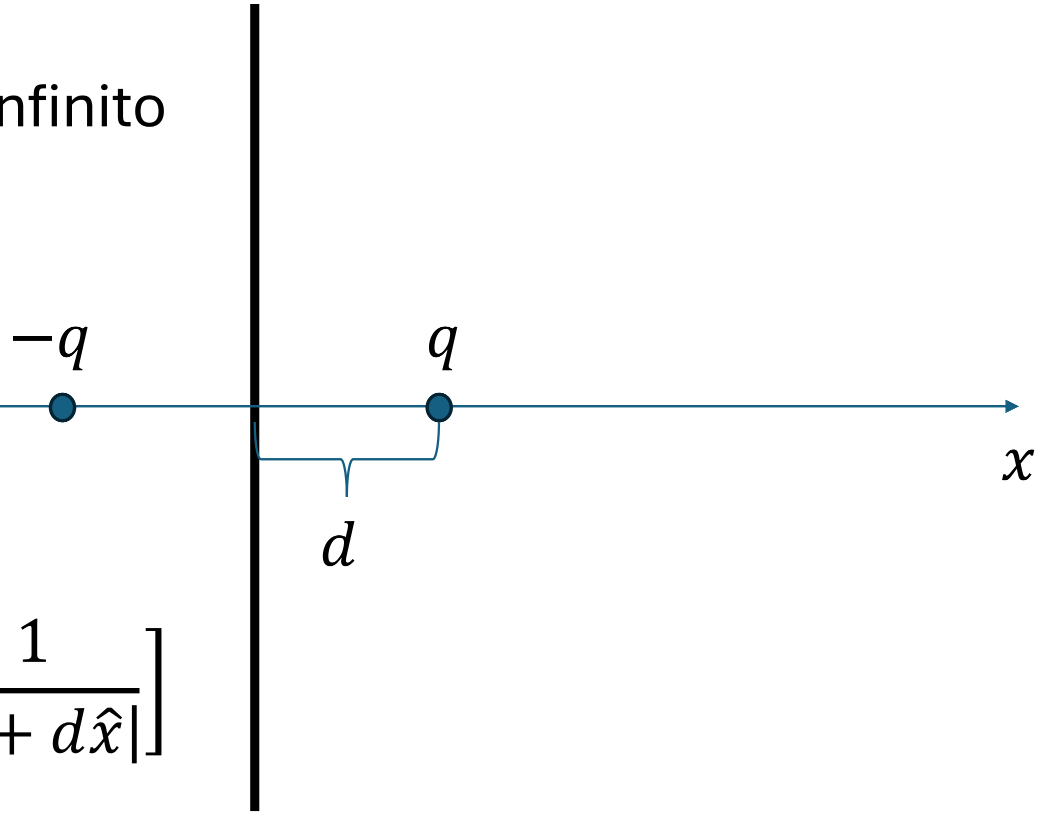
Método de las imágenes

Supongamos que colocamos una carga igual y opuesta en una posición especularmente opuesta (en $x = -d$)



Método de las imágenes

Colocando el cero de la función potencial en el infinito veamos el potencial de ambas cargas:



$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r} - d\hat{x}|} - \frac{1}{|\vec{r} + d\hat{x}|}\right]$$

Método de las imágenes

- Esta solución cumple con la condición de contorno ya que:

$$\varphi(0,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{d^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{d^2+y^2+z^2}}\right] = 0$$

- Entonces, por el teorema de unicidad:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}-d\hat{x}|} - \frac{1}{|\vec{r}+d\hat{x}|}\right]$$

- Es la única solución para el problema

Método de las imágenes

- A partir del resultado podemos obtener el campo eléctrico.

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = k\,q\left\{\frac{(x-d)}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - \frac{(x+d)}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\right\}$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = k\,q\,y\left\{\frac{1}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\right\}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = k\,q\,z\left\{\frac{1}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\right\}$$

- En $x = 0$ tenemos:

$$E_x(x=0,y,z) = -\frac{2\,k\,q\,d}{[d^2+y^2+z^2]^{3/2}}, \quad E_y(x=0,y,z)=0, \quad E_z(x=0,y,z)=0$$

Método de las imágenes

- Como en el borde del conductor el campo es $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

$$\sigma = -\frac{q\,d}{2\pi\left[y^2 + z^2 + d^2\right]^{3/2}}$$

- El signo menos indica que se indujeron cargas negativas. Es posible demostrar que la carga total sobre el conductor es:

$$\int_{\text{plano x=0}} \sigma\, dS = -q$$

Capacidad y condensadores

Capacidad de un conductor aislado

- En un conductor aislado que tiene una carga Q y está a un potencial φ_0 cuando el cero de potencial está en el infinito, la capacidad C se define como:

$$Q = C\ \varphi_0$$

Capacidad de un conductor aislado

- En un conductor aislado que tiene una carga Q y está a un potencial φ_0 cuando el cero de potencial está en el infinito, la capacidad C se define como:

$$Q = C\ \varphi_0$$

- Para una esfera de radio r_0 con carga Q, el potencial es, como vimos $\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_0}$ por lo que:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R_0.$$

Capacidad de un conductor aislado

- En un conductor aislado que tiene una carga Q y está a un potencial φ_0 cuando el cero de potencial está en el infinito, la capacidad C se define como:

$$Q = C\,\varphi_0$$

- Para una esfera de radio R_0 con carga Q, el potencial es, como vimos $\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_0}$ por lo que:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R_0.$$

- C se mide en Faradios (Farad=C/V) y sólo depende del **tamaño y la forma del conductor**

Pregunta

- ¿Cómo varía la capacidad de una esfera cuando cambiamos su radio?

Capacidad en más de un conductor: condensadores

- La capacidad se define también para conjuntos dos conductores.

Capacidad en más de un conductor: condensadores

- La capacidad se define también para conjuntos dos conductores.

- **En el caso de dos conductores con cargas opuestas Q y –Q la capacidad se define como la relación entre la carga Q y la diferencia de potencial entre los dos conductores φ_{12}.**

$$Q = C\,\varphi_{12}$$

Capacidad en más de un conductor: condensadores

- La capacidad se define también para conjuntos dos conductores.

- **En el caso de dos conductores con cargas opuestas Q y –Q la capacidad se define como la relación entre la carga Q y la diferencia de potencial entre los dos conductores φ_{12}.**

$$Q = C\ \varphi_{12}$$

- El conjunto de conductores, material aislante entre ambos y terminales se denomina **condensador o capacitor**.

Condensador plano

- Sean dos conductores planos de área A dispuestos como en la figura a una distancia s.

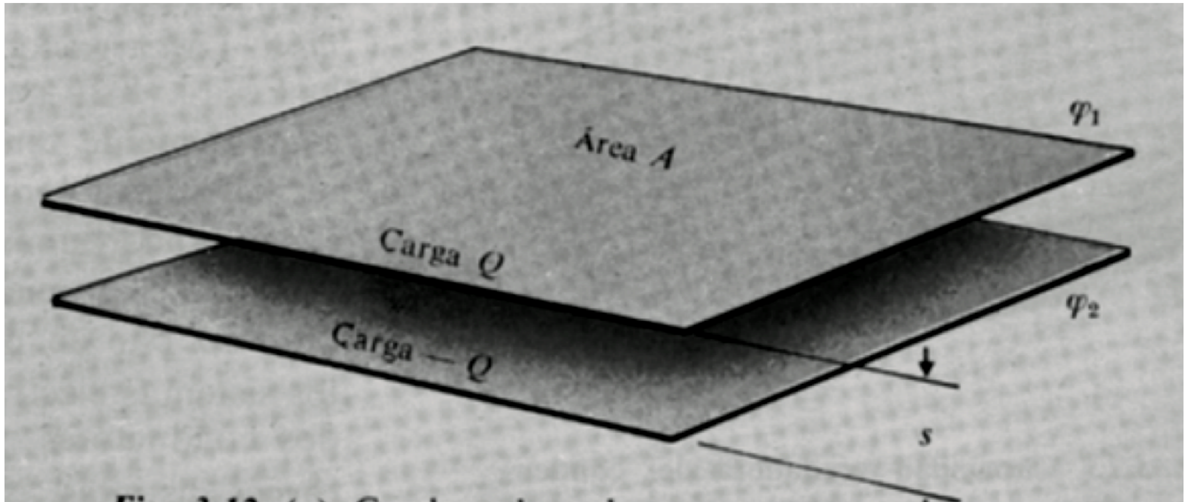


Fig. 3.12 (a). Condensador plano.

Condensador plano

- Sean dos conductores planos de área A dispuestos como en la figura a una distancia s.

- La placa de arriba tiene una carga Q y está a un potencial φ_1.

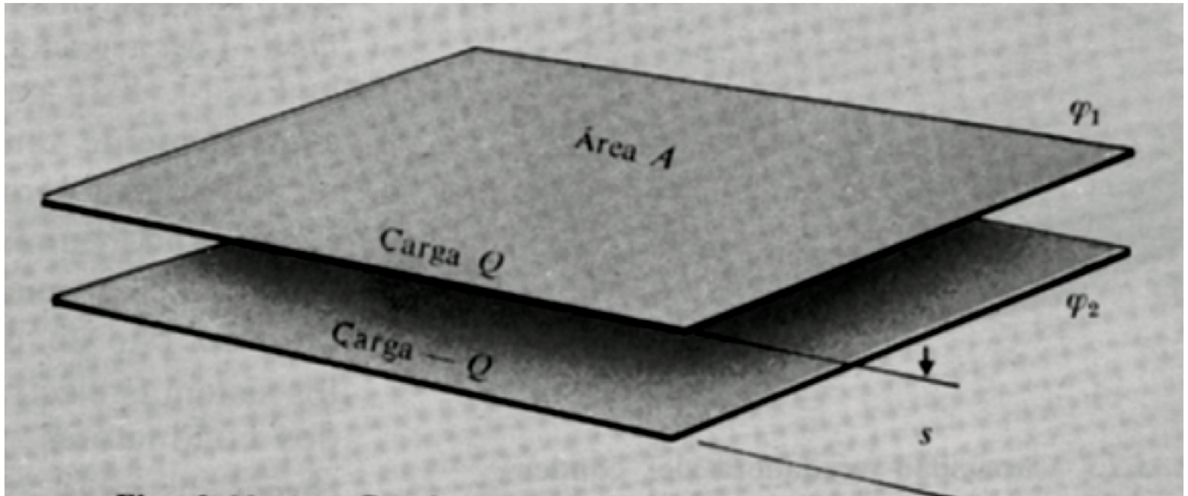


Fig. 3.12 (*a*). Condensador plano.

Condensador plano

- Sean dos conductores planos de área A dispuestos como en la figura a una distancia s.
- La placa de arriba tiene una carga Q y está a un potencial φ_1.
- La placa de abajo tiene una carga $-Q$ y está a un potencial φ_2

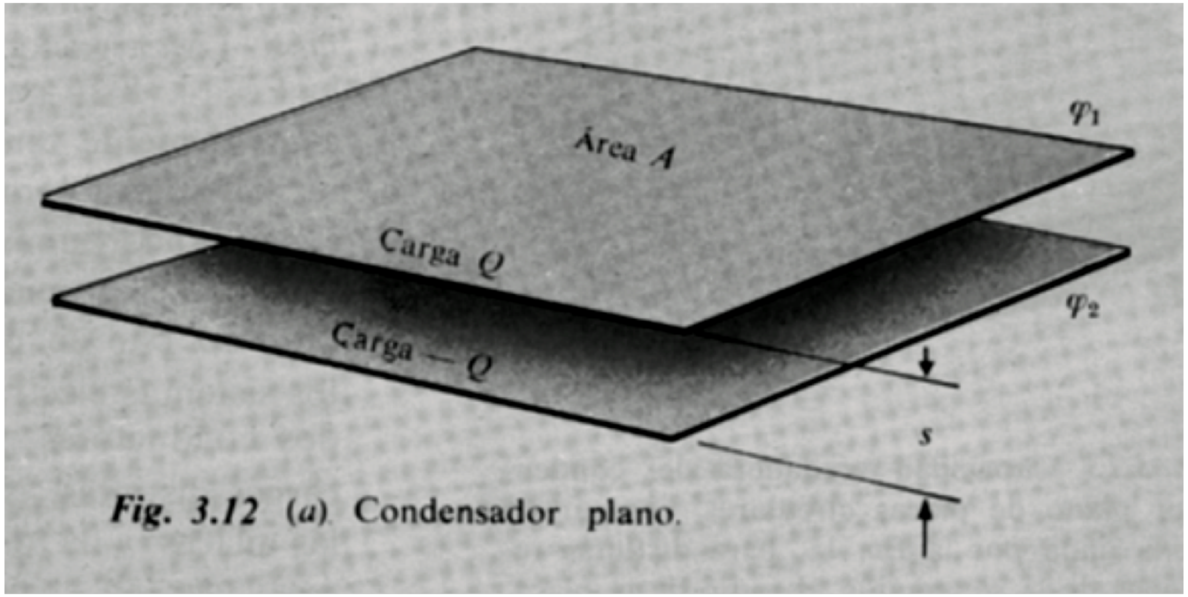
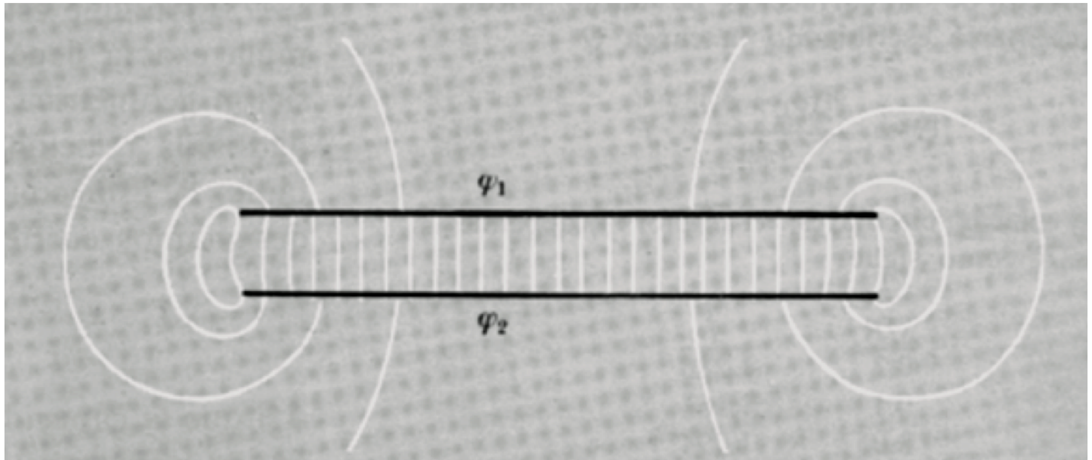


Fig. 3.12 (*a*) Condensador plano.

Condensador plano

- La densidad superficial de carga en la cara interna de un conductor es:
$$\sigma = \epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{s}$$



(*b*) Sección recta de (*a*) mostrando las líneas de fuerza.

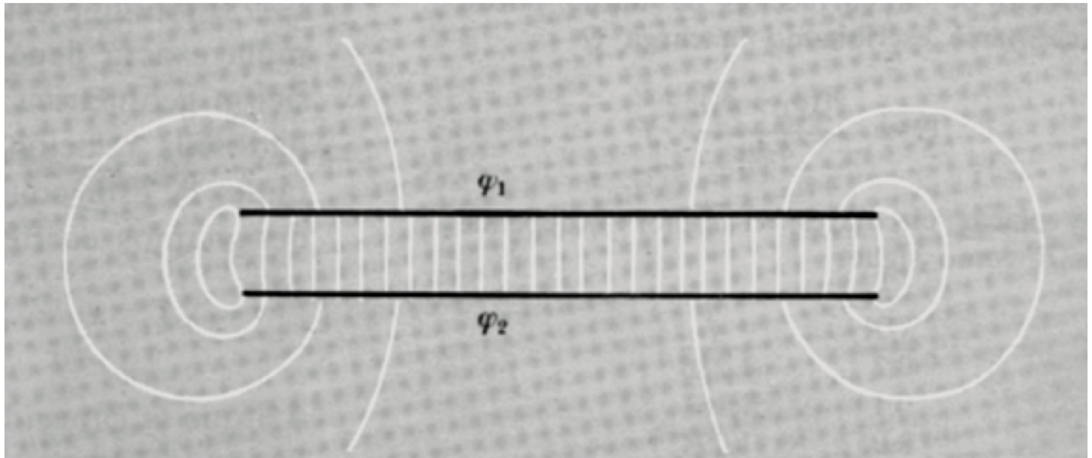
Condensador plano

- La densidad superficial de carga en la cara interna de un conductor es:

$$\sigma = \epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{s}$$

- Si despreciamos el efecto de los bordes, σ es constante y

$$Q = \sigma A = \epsilon_0 A \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{s}$$



(*b*) Sección recta de (*a*) mostrando las líneas de fuerza.

Condensador plano

- Por lo tanto la capacidad el condensador plano es

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon_0 A}{s}$$

- $\epsilon_0 = 8.854\ 10^{-12}\ Farad/m$!

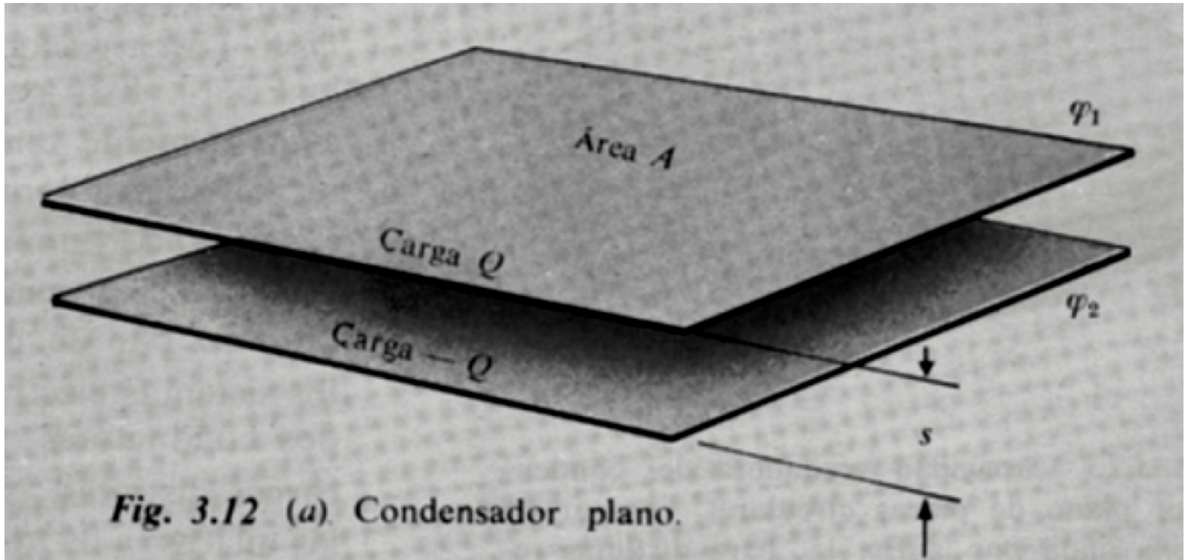
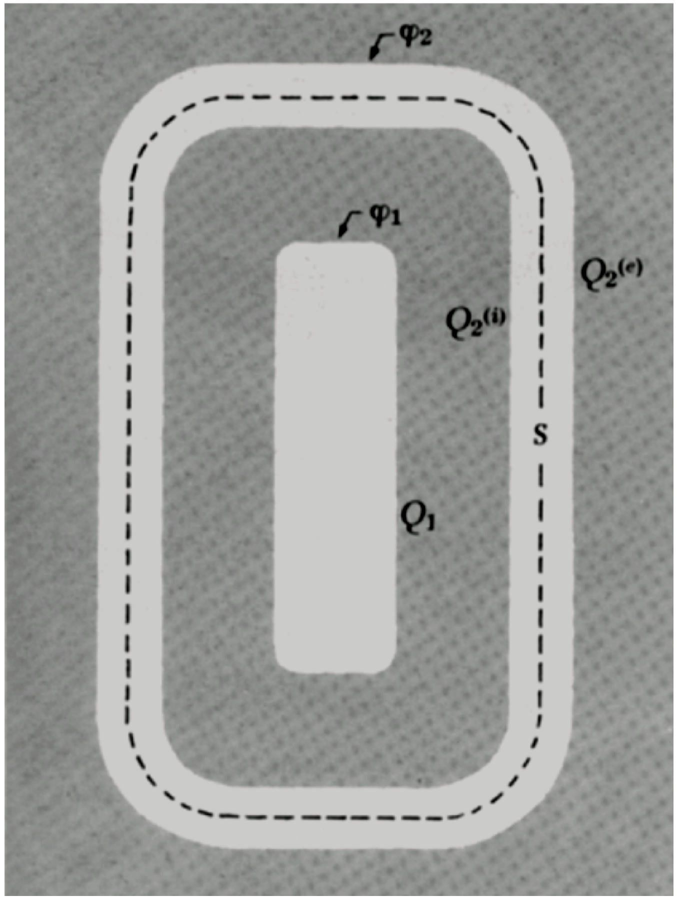


Fig. 3.12 (*a*) Condensador plano.

deci	[d]	10^{-1}	=	0.1
centi	[c]	10^{-2}	=	0.01
milli	[m]	10^{-3}	=	0.001
micro	[μ]	10^{-6}	=	0.000 001
nano	[n]	10^{-9}	=	0.000 000 001
pico	[p]	10^{-12}	=	0.000 000 000 001
femto	[f]	10^{-15}	=	0.000 000 000 000 001
atto	[a]	10^{-18}	=	0.000 000 000 000 000 001
zepto	[z]	10^{-21}	=	0.000 000 000 000 000 000 001
yocto	[y]	10^{-24}	=	0.000 000 000 000 000 000 000 001

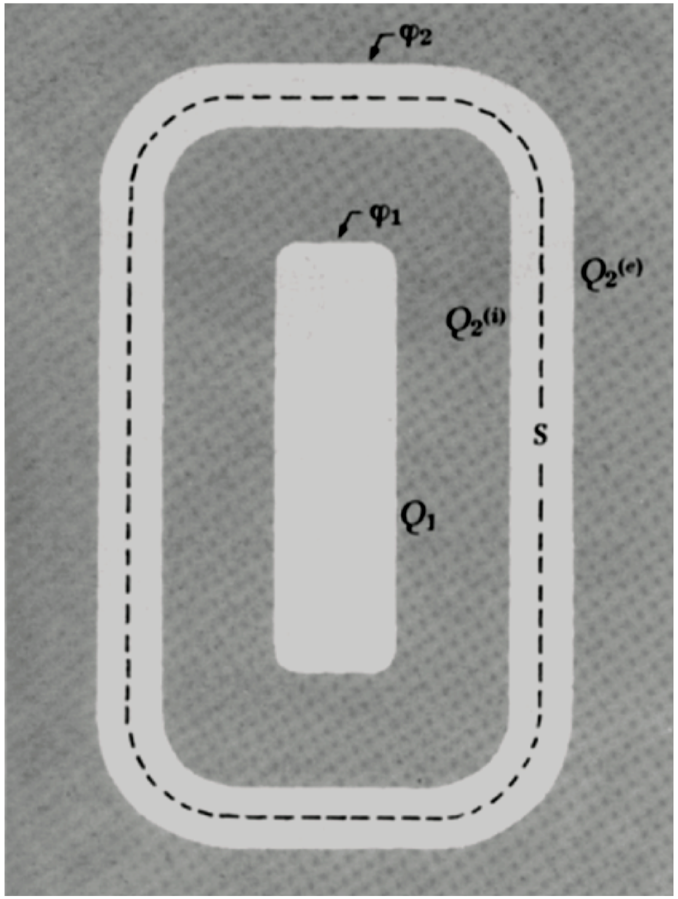
Capacidad en más de un conductor: otros condensadores



- Ahora supongamos un conductor dentro de otro.

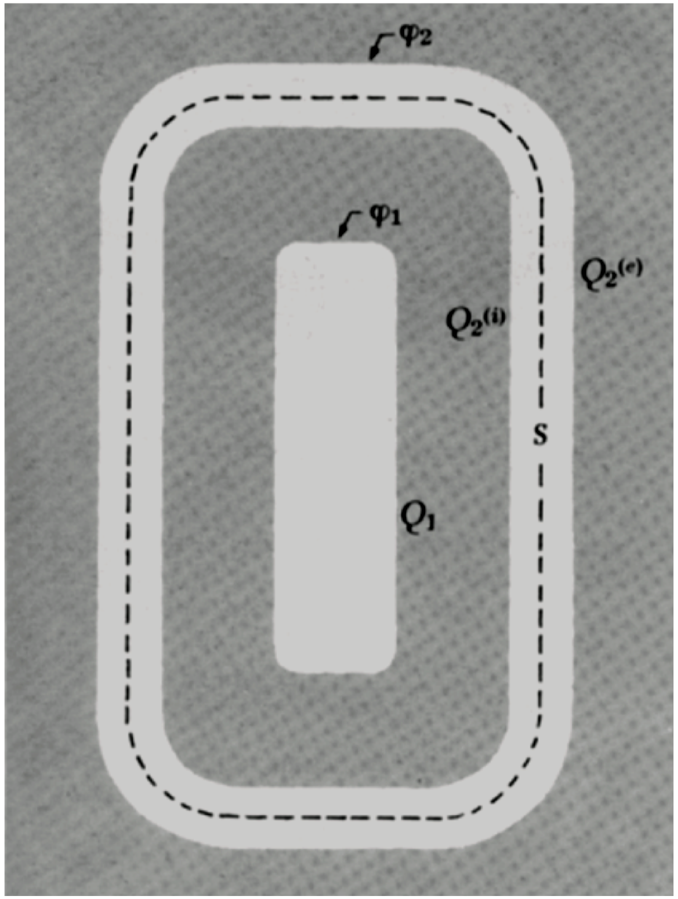
- También puede considerarse un condensador.

Capacidad en más de un conductor: otros condensadores



- Hay tres grupos de cargas:
  - La carga total Q_1 en el conductor interior,
  - La carga Q_2(i) en la superficie interior del conductor externo
  - La carga Q_2(e) en la superficie exterior del conductor externo

Capacidad en más de un conductor: otros condensadores



- Como el campo sobre la superficie s debe ser nulo, por ley de Gauss, la carga total encerrada debe ser cero y por lo tanto:

$$Q_2^i = -Q_1$$

- El condensador será entonces entre el conductor interior y la capa interna del exterior. Su capacidad es

$$C = \frac{Q_1}{(\varphi_1 - \varphi_2)}$$