

# Energía almacenada en un capacitor

- Supongamos un condensador de capacidad  $C$  con una diferencia de potencial  $\varphi_{12}$ .
- En un conductor hay una carga  $Q$  mientras que en el otro,  $-Q$ .
- Quitemos una carga  $dQ$  del conductor con carga  $-Q$  y llevémosla al conductor que tiene carga  $Q$  a lo largo de la diferencia de potencial  $\varphi_{12}$ .

# Energía almacenada en un capacitor

- El diferencial de trabajo  $dW$  que realizamos viene dado por:

$$dW = \varphi_{12} dQ = Q \frac{dQ}{C}$$

- Entonces, para cargar un conductor descargado inicialmente hasta alcanzar una carga final  $Q_f$  el trabajo será:

$$W = \int_0^{Q_f} \varphi_{12} dQ = \frac{1}{C} \int_0^{Q_f} Q dQ = \frac{Q_f^2}{2C}$$

- Esta es la energía almacenada en el capacitor  $U$

# Energía almacenada en un capacitor

- La energía almacenada también se puede escribir como :

$$U = \frac{1}{2} C \varphi_{12}^2$$

- Para un **condensador plano**  $C = \epsilon_0 \frac{A}{s}$  y  $Es = \varphi_{12}$ . Entonces:

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{s} (Es)^2 = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} (As)$$

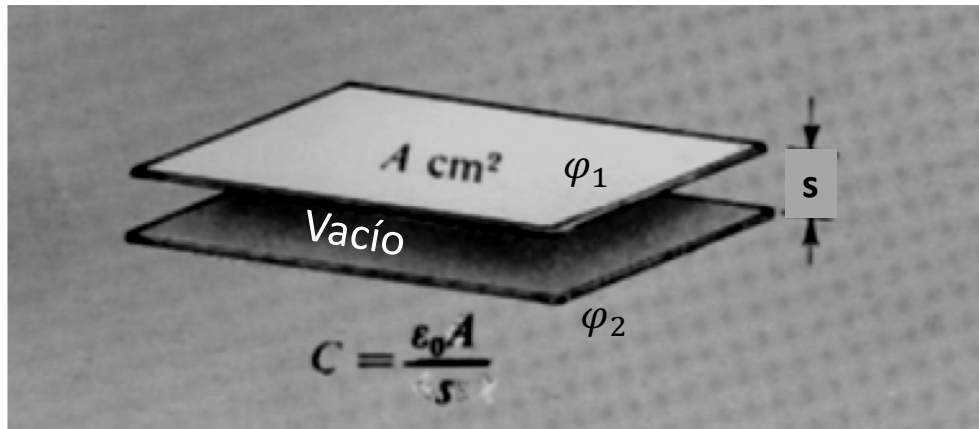
# Energía almacenada en un capacitor

- Entonces,  $\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$  es la energía almacenada en el capacitor por unidad de volumen.
- **Esta expresión es general y quiere decir que es posible almacenar energía en un campo electrostático cualquiera.**
- Más adelante veremos cómo almacenar energía en un campo magnético.

# Dieléctricos:

- Propiedades:
  - Son básicamente aislantes
  - Se polarizan en presencia de un campo eléctrico externo
- Usos:
  - Colocados entre conductores aumentan la capacidad por acumulación de carga polarizada.
  - Como aislantes para impedir descargas eléctricas.
  - Colocados entre placas permite achicar distancia entre ellas para aumentar la capacidad.

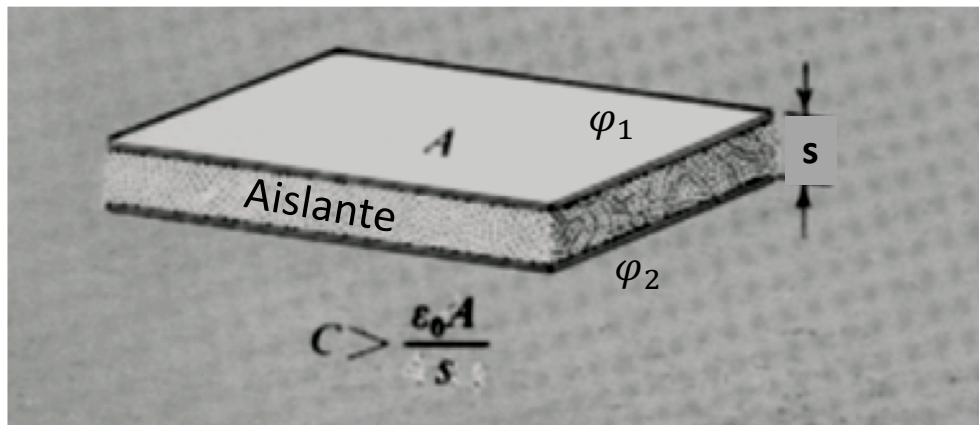
# Experiencia con condensadores en vacío y con dieléctricos



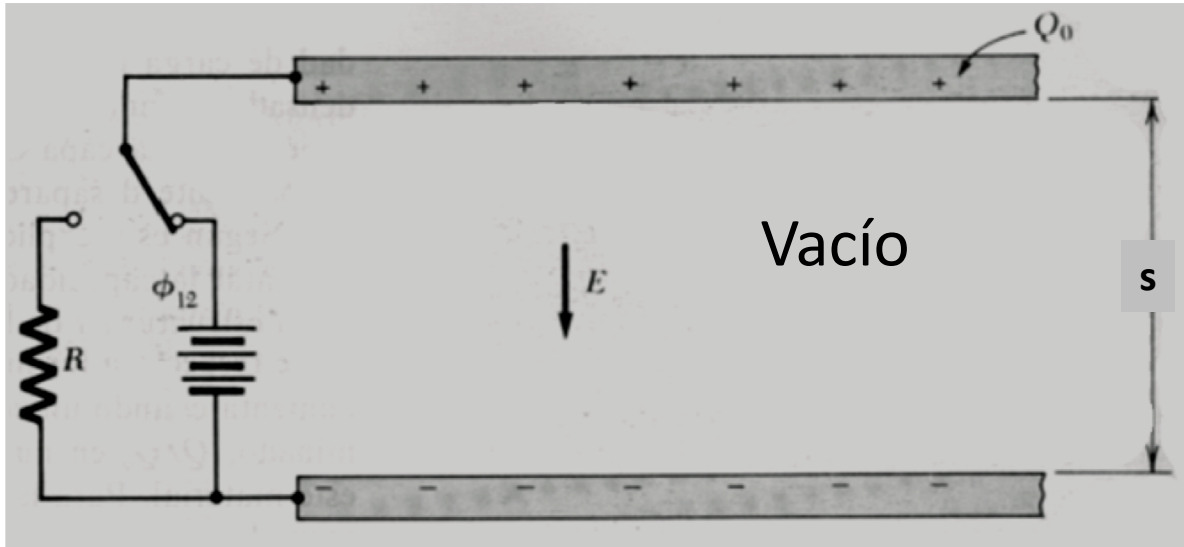
- En el vacío: dos conductores aislados uno del otro. Para uno plano:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon_0 A}{s}$$

- Cuando metemos un material aislante entre las placas, manteniendo la diferencia de potencial, tenemos una capacidad mayor.



- **Esto se debe a una mayor cantidad de carga en las placas.**

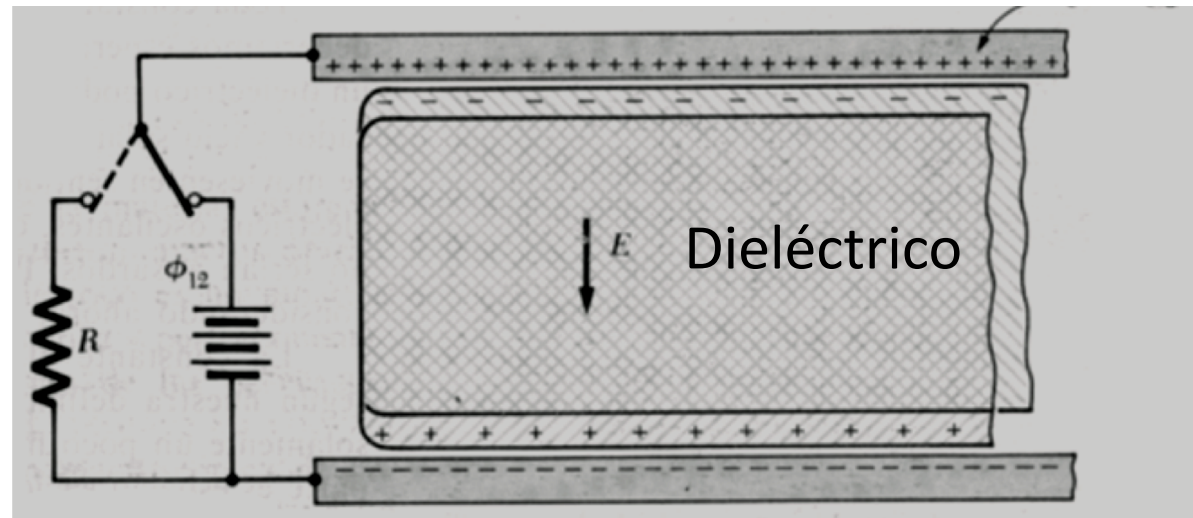


La batería mantiene la diferencia de potencial  $\phi_{12}$ . Con una carga  $Q_0$ , tenemos:

$$Q_0 = C_0 \phi_{12}$$

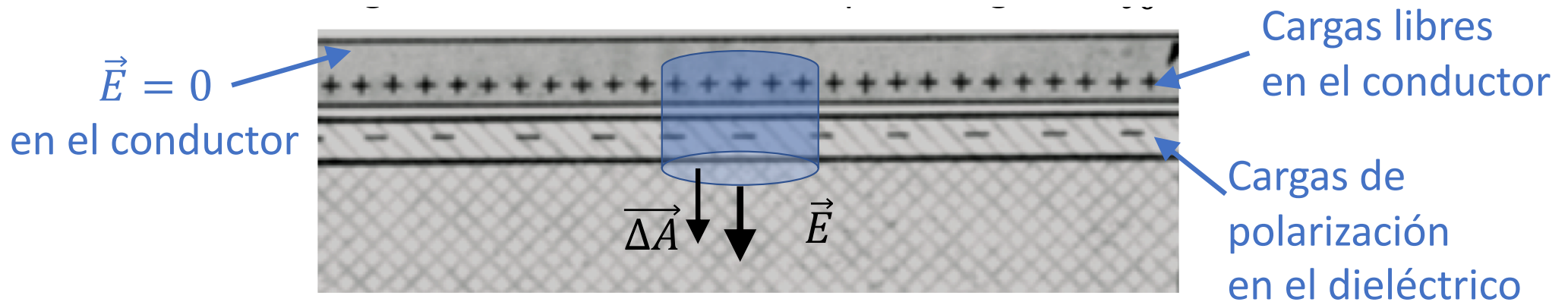
El campo eléctrico desplaza en el aislante las cargas positivas hacia abajo y las negativas hacia arriba. Capas no compensadas se ubican junto a las placas. En las placas hay ahora una carga mayor

$$Q = \kappa Q_0 \quad \kappa > 1$$



# Cargas libres y de polarización

- En el vacío, el campo es  $E = \frac{\varphi_{12}}{s}$
- Cuando metemos el dieléctrico, en todo el espacio, la diferencia de potencial es la misma (por acción de la batería) y la distancia es la misma con lo cual  $E$  no cambia.
- Esto quiere decir que la carga en el conductor  $Q$ , más la carga en el borde contiguo del dieléctrico tiene que ser igual a  $Q_0$ .



# Cargas libres y de polarización

- Entonces definiendo  $\kappa > 1$  tal que  $Q = \kappa Q_0$ , la carga en el borde contíguo del dieléctrico es

$$Q' = -(\kappa Q_0 - Q_0) = (1 - \kappa)Q_0$$

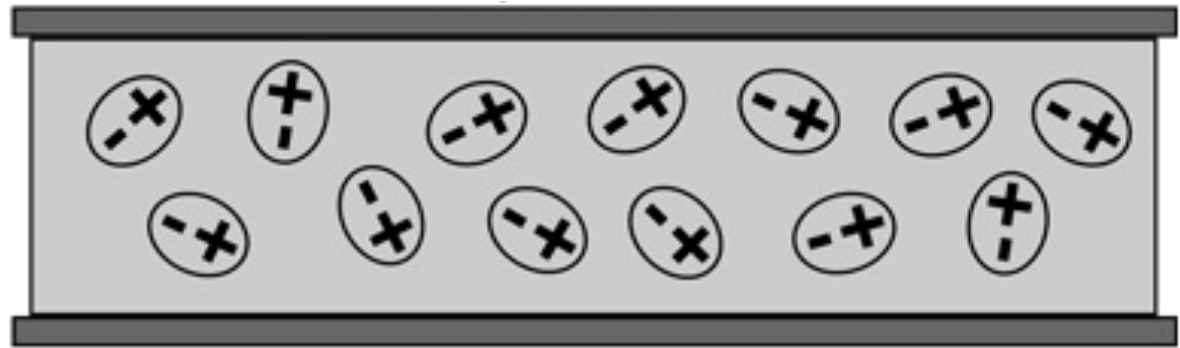
- $\kappa$  es la **constante dieléctrica**

**Tabla 10.1    Constantes dieléctricas de varias sustancias     $\kappa$** 

| <i>Substancia</i>                      | <i>Condiciones</i> | <i>Constante dieléctrica</i> |
|----------------------------------------|--------------------|------------------------------|
| Aire                                   | Gas, 0° C, 1 atm   | 1,00059                      |
| Metano                                 | Gas, 0° C, 1 atm   | 1,00088                      |
| Ácido clorhídrico, HCl                 | Gas, 0° C, 1 atm   | 1,0046                       |
| Agua H <sub>2</sub> O                  | Gas, 110° C, 1 atm | 1,0126                       |
|                                        | Líquido, 20° C     | 80                           |
| Benceno, C <sub>6</sub> H <sub>6</sub> | Líquido, 20° C     | 2,28                         |
| Metanol CH <sub>3</sub> OH             | Líquido, 20° C     | 33,6                         |
| Amoníaco, NH <sub>3</sub>              | Líquido, — 34° C   | 22                           |
| Aceite de transformador                | Líquido, 20° C     | 2,24                         |
| Cloruro sódico, NaCl                   | Cristal, 20° C     | 6,12                         |
| Azufre, S                              | Sólido, 20° C      | 4,0                          |
| Silicio, Si                            | Sólido, 20° C      | 11,7                         |
| Polietileno                            | Sólido, 20° C      | 2,25-2,3                     |
| Porcelana                              | Sólido, 20° C      | 6,0-8,0                      |
| Cera de parafina                       | Sólido, 20° C      | 2,1-2,5                      |
| Vidrio pyrex 7070                      | Sólido, 20° C      | 4,00                         |

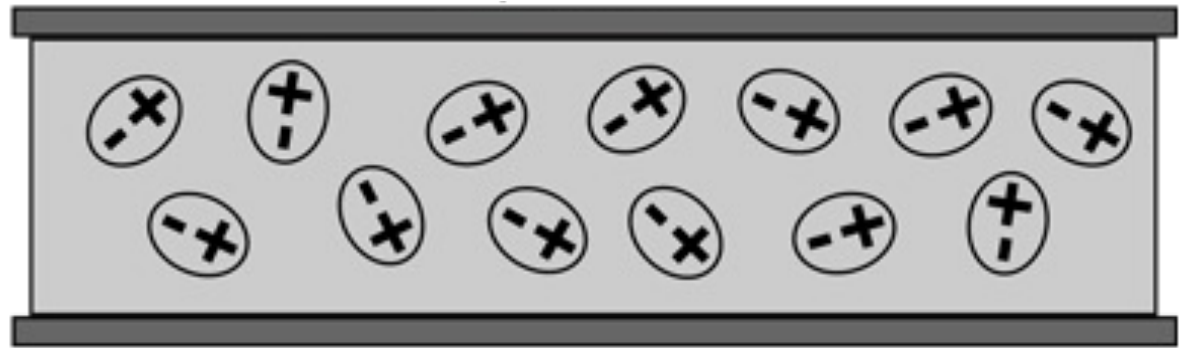
# Origen de la respuesta dieléctrica

Moléculas  
dipolares permanentes o  
inducidas orientadas  
desordenadamente

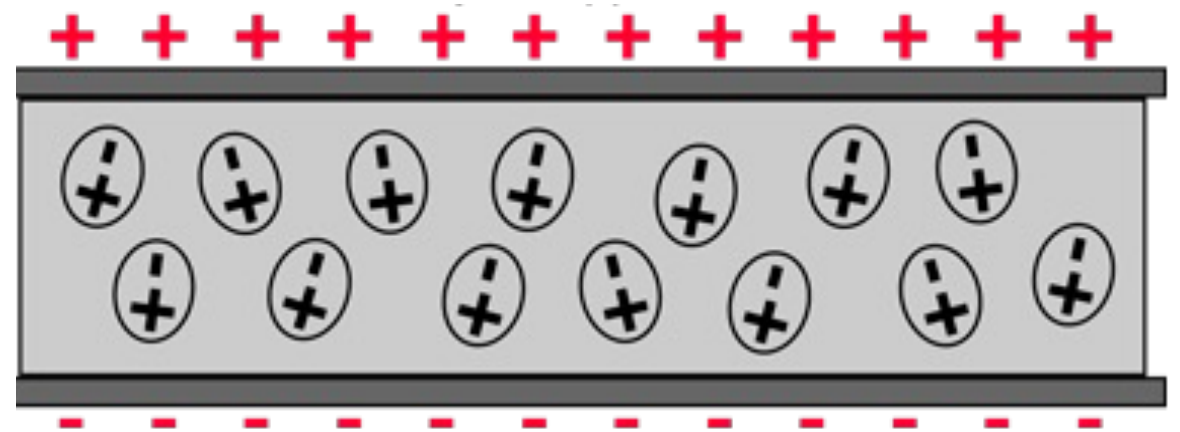


# Origen de la respuesta dieléctrica

Moléculas  
dipolares permanentes o  
inducidas orientadas  
desordenadamente



La presencia de un  
campo externo  
orienta los dipolos



# Polarización

- Definamos la **polarización**  $\vec{P}$  como la densidad volumétrica de momentos dipolares eléctricos en un dieléctrico. Si  $N$  es el número de dipolos por unidad de volumen dentro de un dieléctrico y  $\vec{p}$  es el momento dipolar promedio:

$$\vec{P} = N\vec{p}$$

- Para dieléctricos lineales  $\vec{P}$  es proporcional al campo externo  $\vec{E}$ :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

- Donde  $\chi_e$  es la susceptibilidad eléctrica (cuan fácilmente un dieléctrico se polariza en presencia de un campo externo).

$$\frac{P}{\epsilon_0 E} = \chi_e$$

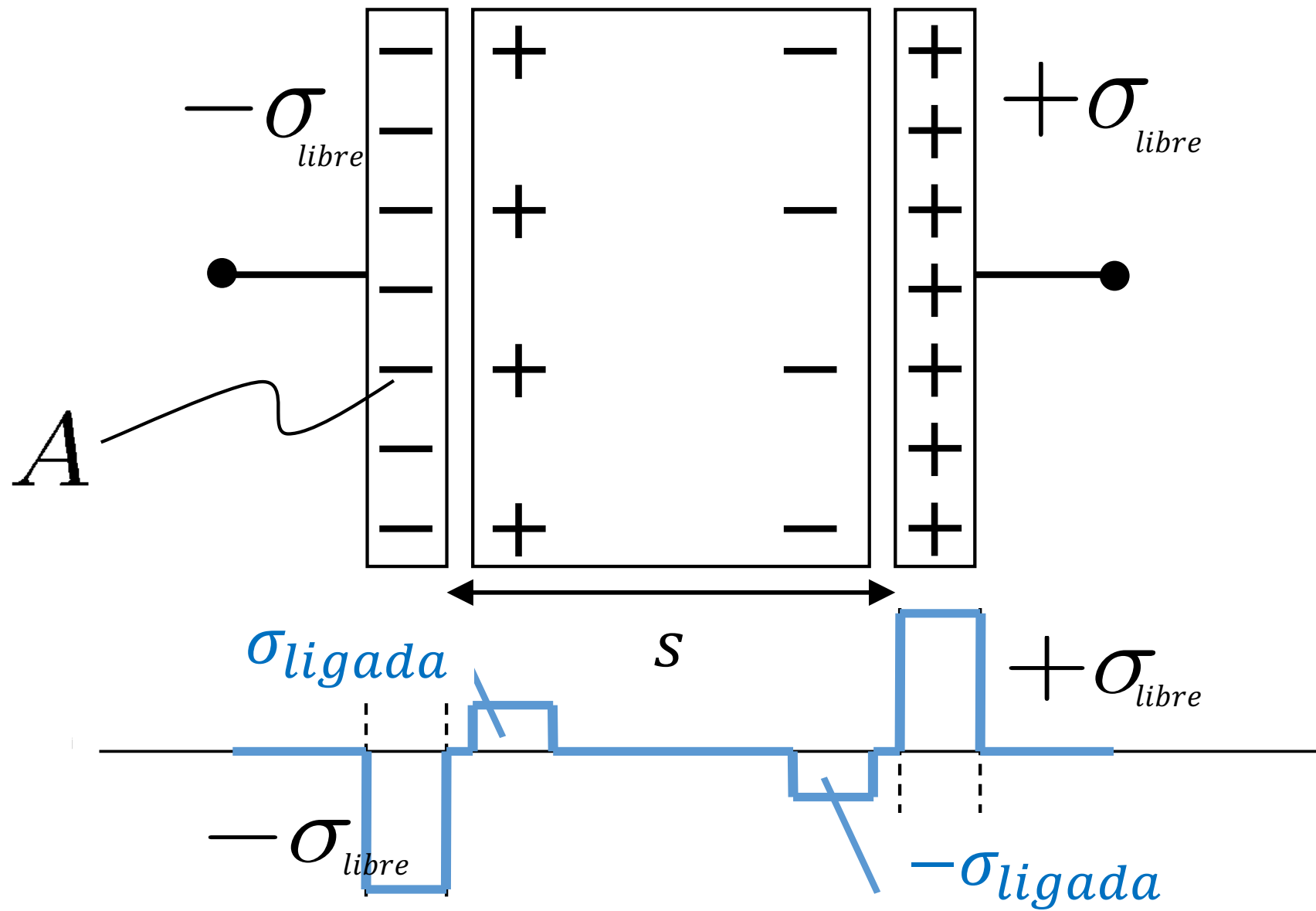
# Cargas ligadas

- Por oposición a la carga libre en los conductores, se denomina carga ligada a la carga asociada a la polarización.

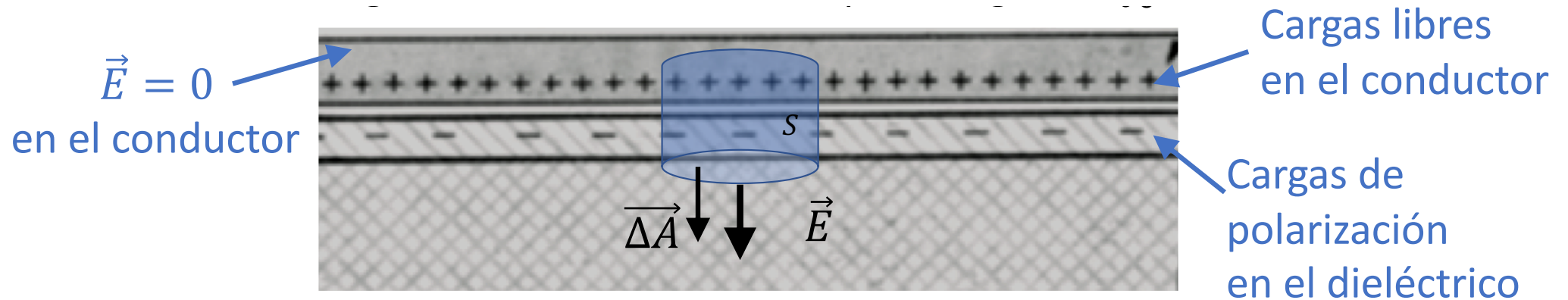
- Su distribución volumétrica  $\rho_{ligada}$  se define como:

$$\rho_{ligada} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

- Definida así, en el caso del capacitor plano tenemos,  $\sigma_{ligada}$  es un exceso de carga superficial negativa de polarización frente a la placa conductora cargada positivamente y viceversa.



# Ley de Gauss para Dieléctricos



- Volviendo a nuestra superficie cerrada de Gauss:

$$\oint \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{a} = \iiint (\rho_{libre} + \rho_{ligada}) dV$$

- Como  $\rho_{ligada} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

$$\oint_s \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{a} = \iiint (\rho_{libre} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}) dV$$

# Ley de Gauss para Dieléctricos

- Por teorema de Gauss:

$$\oiint_S \vec{P} \cdot \vec{da} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV$$

- Entonces

$$\oiint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot \vec{da} = \iiint \rho_{libre} dV$$

- El campo  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  se llama corriente de desplazamiento.  
Entonces:

$$\oiint \vec{D} \cdot \vec{da} = \iiint \rho_{libre} dV$$

Ley de Gauss  
para Dieléctricos

# Ley de Gauss para Dieléctricos

- Para dieléctricos lineales  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$ :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

- Donde  $\varepsilon = \varepsilon_0 \kappa \geq \varepsilon_0$
- Entonces la **Ley de Gauss para dieléctricos lineales** dada una superficie cerrada  $S$  que encierra un volumen  $V$ :

$$\oiint_S \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{da} = \iiint_V \rho_{libre} dV$$

# Ley de Gauss para Dieléctricos

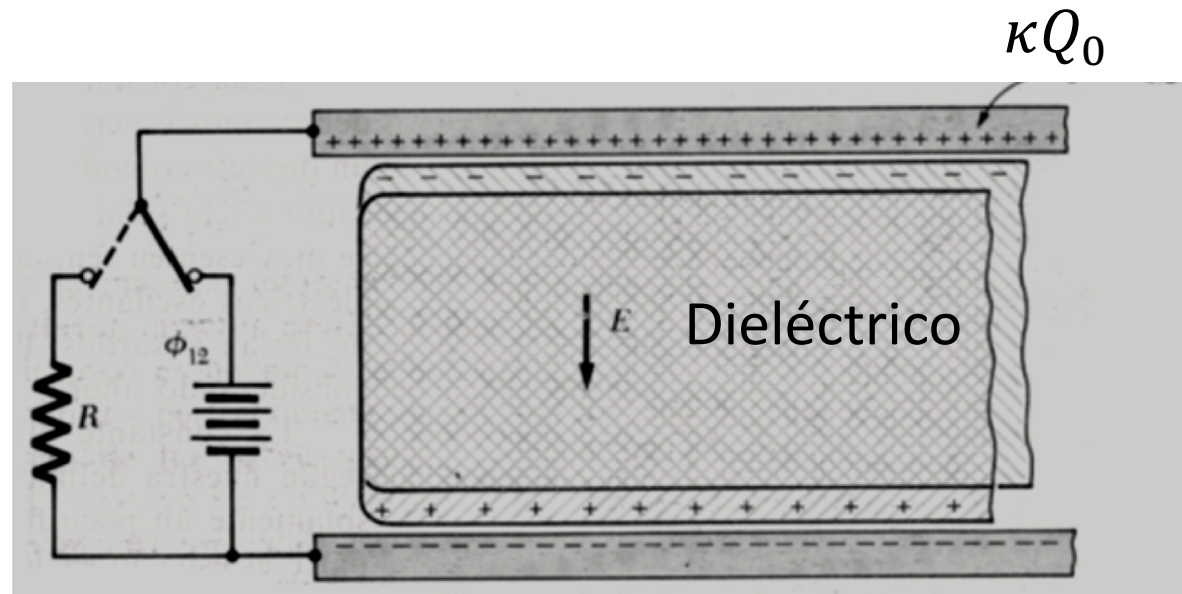
- Recordando el teorema de la divergencia, otra forma de escribir la ley de Gauss es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre}$$

Esta es una de las cuatro ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, nos dice que las cargas son manantiales o sumideros de campo eléctrico

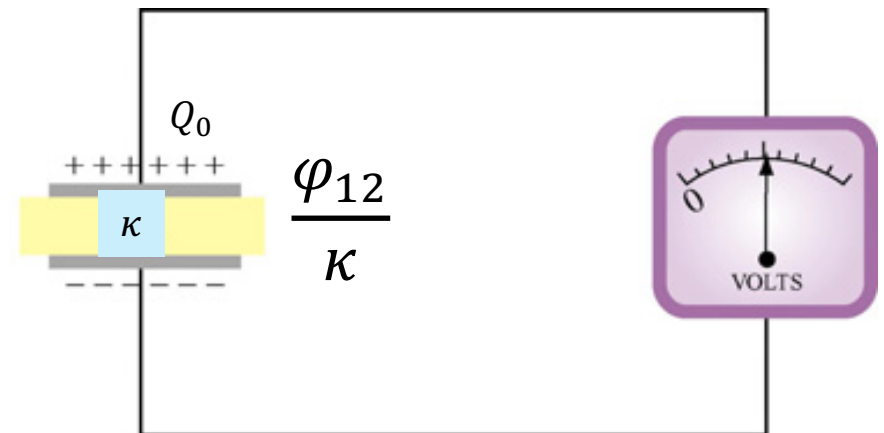
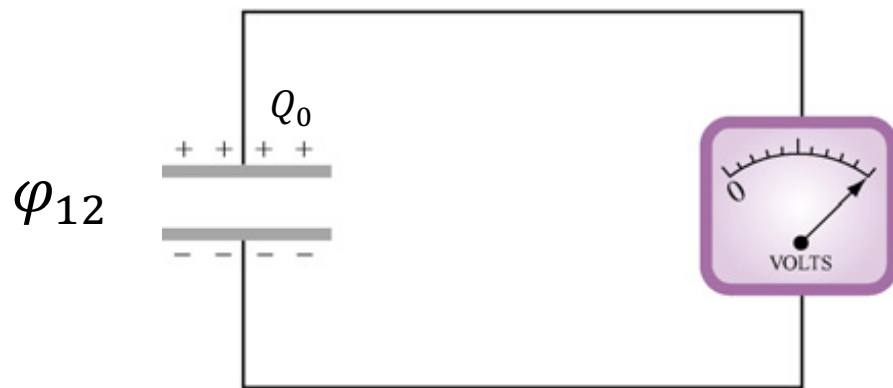
# Dieléctrico en capacitor a potencial constante

- Colocamos un dieléctrico de constante  $\kappa$  llenando el espacio entre placas a potencial constante  $\phi_{12}$
- La carga en el conductor aumenta un factor  $\kappa$ .
- Al mantenerse el potencial en  $\phi_{12}$ , la capacidad aumenta a  $\kappa C$ .
- El campo total  $E = \phi_{12}/s$  en el dieléctrico no cambia

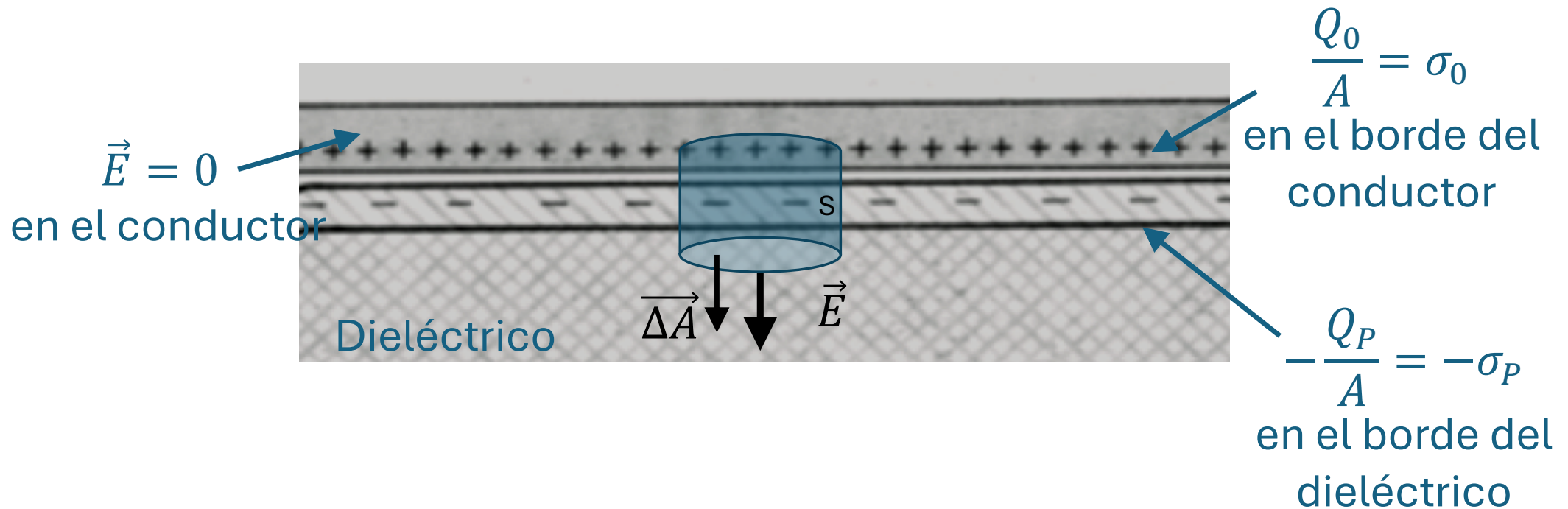


# Dieléctricos en capacitor a carga constante

- Colocamos un dieléctrico de constante  $\kappa$  manteniendo la carga  $Q_0$ .
- Experimentalmente se ve que el potencial cae a  $\frac{\varphi_{12}}{\kappa}$ , con lo cual, el campo cae a  $\frac{\varphi_{12}}{s\kappa}$ .
- La capacidad aumenta a  $\kappa C$ .



# Dieléctricos en capacitor a carga constante (sin batería)



$$\oiint_S \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{a} = \epsilon \vec{E} \cdot \Delta \vec{A} = \epsilon E \Delta A = \iiint \rho_{libre} dv = Q_0 \frac{1}{A} \Delta A$$

# Dieléctricos en capacitor a carga constante (sin batería)

- Simplificando, tenemos  $E = \frac{Q_0}{\epsilon A} = \frac{Q_0}{\epsilon_0 \kappa A}$
- Para el caso sin dieléctrico el campo vale  $E\kappa = \frac{Q_0}{\epsilon_0 A}$
- Entonces, juntando las dos últimas expresiones para  $E$ :

$$\frac{Q_0}{\kappa \epsilon_0 A} = \frac{Q_0 - Q_P}{\epsilon_0 A} \Rightarrow \frac{Q_0}{\kappa} = Q_0 - Q_P$$

- con lo cual la carga de polarización es

$$Q_P = \left[1 - \frac{1}{\kappa}\right] Q_0, \text{ ó } \sigma_P = \left[1 - \frac{1}{\kappa}\right] \sigma_0$$