Energía en capacitores con dieléctricos

Energía almacenada en un capacitor con dielectrico

- La energía almacenada en un capacitor venía dada por:

$$U = \frac{1}{2} C \Delta\varphi^2$$

- Al colocar un dieléctrico, se espera que esta cantidad cambie:
  - A potencial constante
  - A carga constante

Energía almacenada en un capacitor con dielectrico (con batería)

- Supongamos un capacitor de capacidad inicial C_i que llenamos completamente con un dieléctrico de constante κ>1, manteniendo el potencial constante.
- La energía pasa de un valor inicial (subíndice i)

$$U_i = \frac{1}{2} C_i \Delta\varphi_i^2$$

- A un valor final (subíndice f)

$$U_f = \frac{1}{2} C_f \Delta\varphi_f^2 = \frac{1}{2} \kappa C_i \Delta\varphi_i^2 > U_i \qquad \Delta\varphi_f = \Delta\varphi_i$$

Pregunta

- ¿De dónde sale la energía que ingresa al sistema al colocar el dieléctrico a voltaje constante?

Energía almacenada en un capacitor con dielectrico (sin batería)

- Sea un capacitor de capacidad inicial C_i y diferencia de potencial $\Delta\varphi_i$ que llenamos completamente con un dieléctrico de constante κ>1, manteniendo la carga constante.
- La energía pasa de un valor inicial

$$U_i = \frac{1}{2} C_i \Delta\varphi_i^2$$

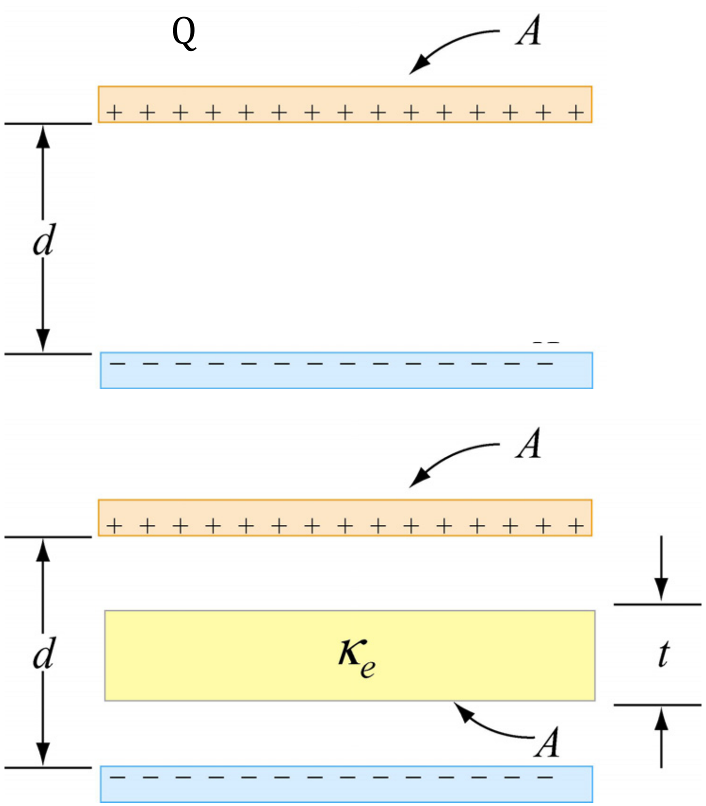
- A un valor final donde $C_f = \kappa C_i$ y $\Delta\varphi_f = \frac{\Delta\varphi_i}{\kappa}$

$$U_f = \frac{1}{2} C_f \Delta\varphi_f^2 = \frac{1}{2} \kappa C_i \left[\frac{\Delta\varphi_i}{\kappa}\right]^2 = \frac{U_i}{\kappa} < U_i$$

Pregunta

- ¿A dónde va la energía que ya no está en el estado final?

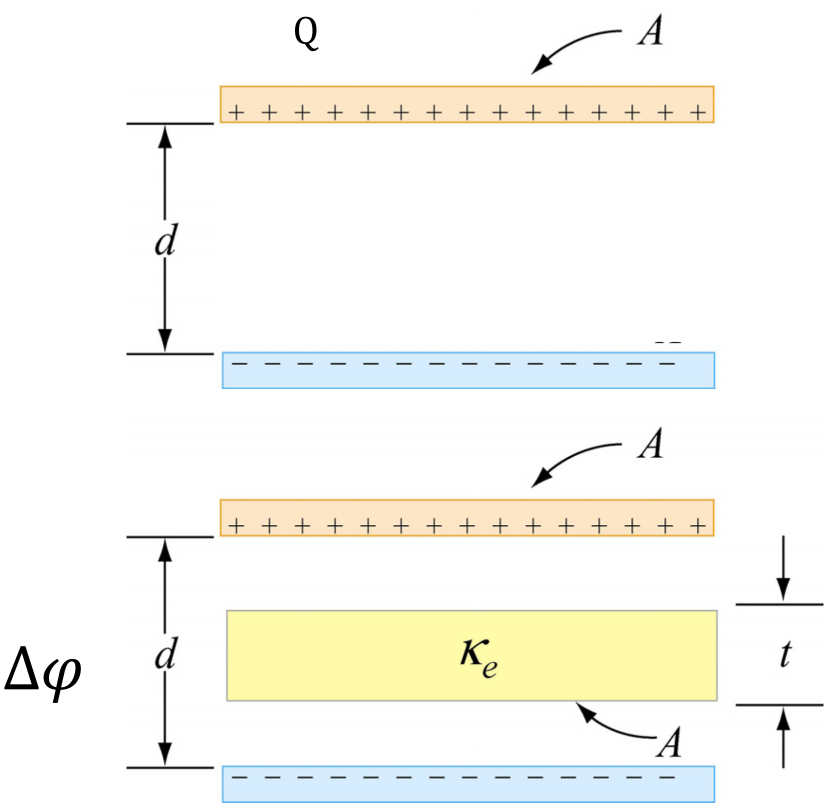
Capacitores con dieléctricos (1)



- Dado un capacitor plano de área A y espesor d, metemos un dieléctrico de constante κ_e y espesor $t < d$.
- La carga Q en el conductor permanece constante.
- Queremos ver cómo cambia la capacidad.
- Inicialmente, la capacidad es:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Capacitores con dieléctricos (1)



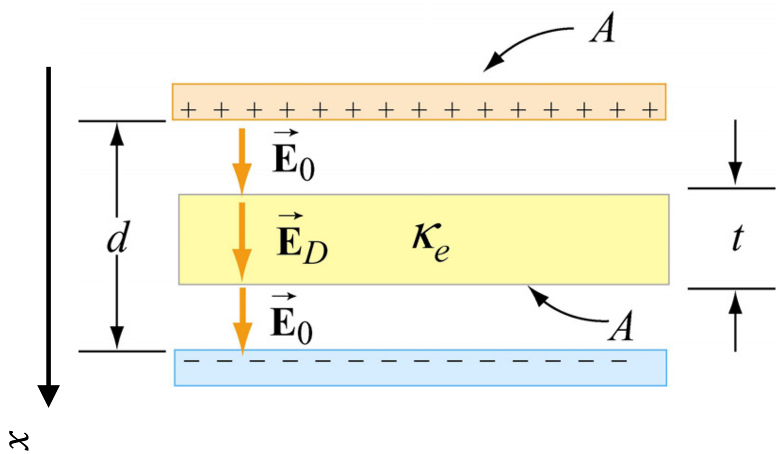
- La capacidad del capacitor con el dieléctrico vendrá dada por

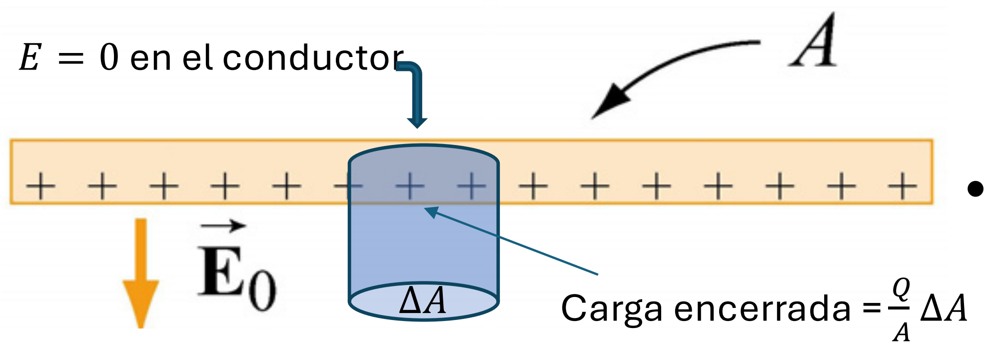
$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi}$$

donde $\Delta\varphi$ es la diferencia de potencial entre las placas una vez que metimos el dieléctrico.

- Como Q no varía, sólo tenemos que calcular $\Delta\varphi$.

Capacitores con dieléctricos (1)





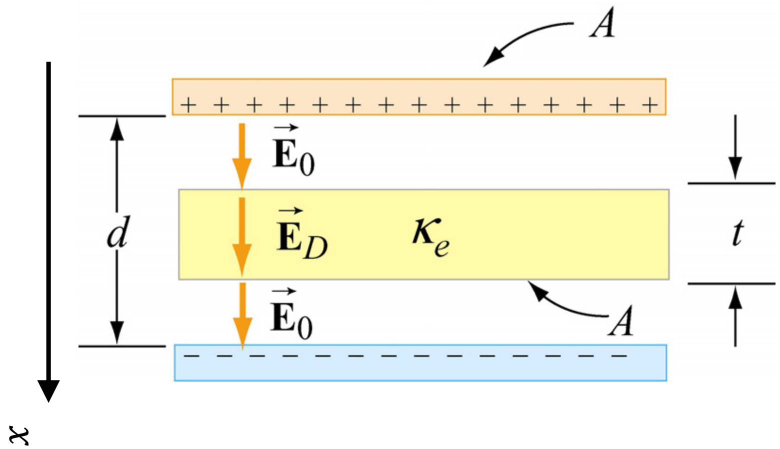
- Calculemos entonces el campo en el espacio entre las placas.

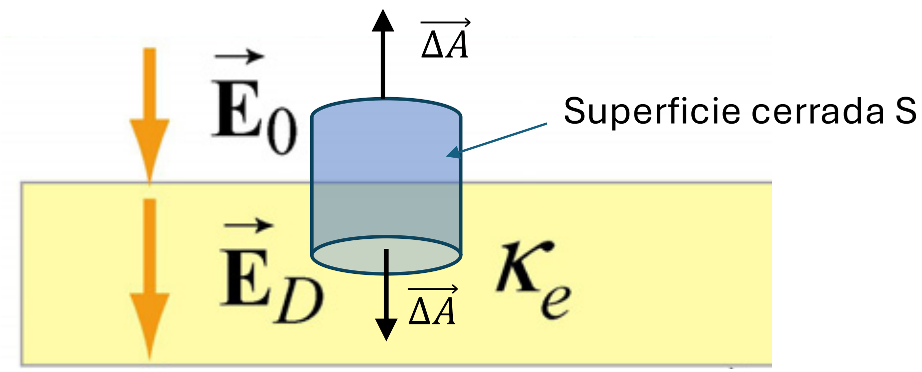
- Por ley de Gauss, En la capa de vacío de arriba el campo es simplemente

$$E_0 = \frac{Q}{A\epsilon_0} \text{ o } \vec{E}_0 = \frac{Q}{A\epsilon_0}\hat{x}$$

- En la capa de vacío de abajo, el valor del campo es el mismo.

Capacitores con dieléctricos (1)





- Para el campo $\vec{E}_D$ en el dieléctrico usemos la ley de Gauss para dieléctricos:

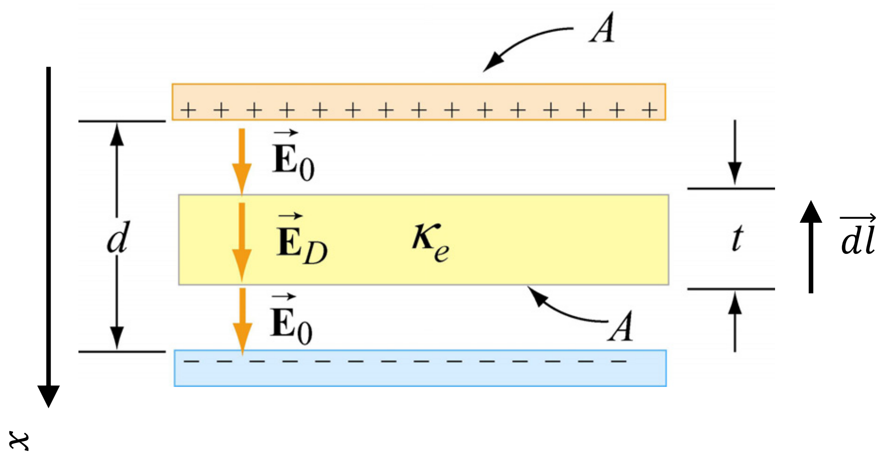
$$\int_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{da} = 0$$ (no hay cargas libres)

$$\epsilon E_D \Delta A - \epsilon_0 E_0 \Delta A = 0$$

entonces como $\epsilon = \kappa_e\ \epsilon_0$

$$\vec{E}_D = \frac{\vec{E}_0}{\kappa_e}$$

Capacitores con dieléctricos (1)



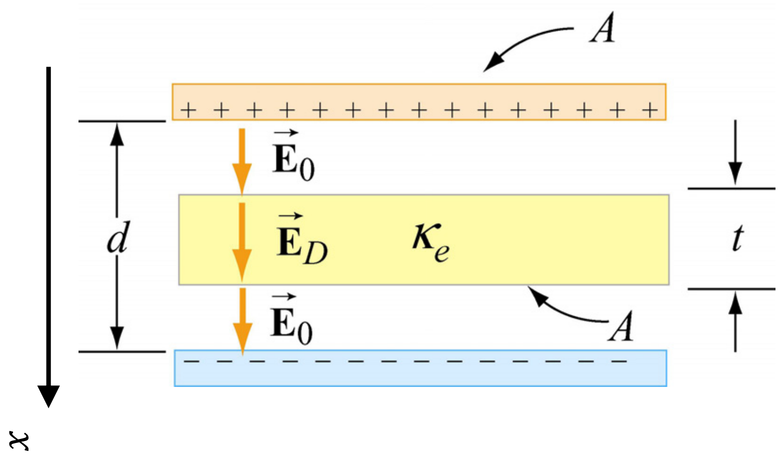
- La diferencia de potencial entre las placas es

$$\Delta\varphi = -\int_{-}^{+} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

- la integral de camino da:

$$\Delta\varphi = E_0(d-t) + E_D\, t$$
$$= \frac{Q}{A\epsilon_0}(d-t) + \frac{Q}{A\kappa_e\epsilon_0}\, t$$

Capacitores con dieléctricos (1)



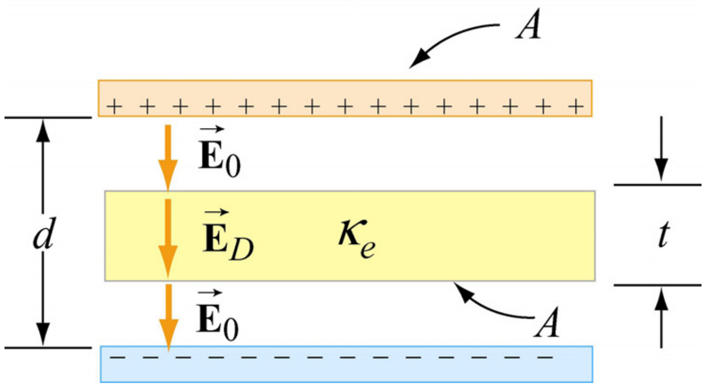
- Calculemos ahora la capacidad del capacitor con el dieléctrico:

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{Q}{\frac{Q}{A\epsilon_0}(d-t) + \frac{Q}{A\kappa_e\epsilon_0}t}$$

- simplificamos y reacomodamos el denominador

$$C = \frac{1}{\frac{d-t}{A\epsilon_0} + \frac{t}{A\kappa_e\epsilon_0}}$$

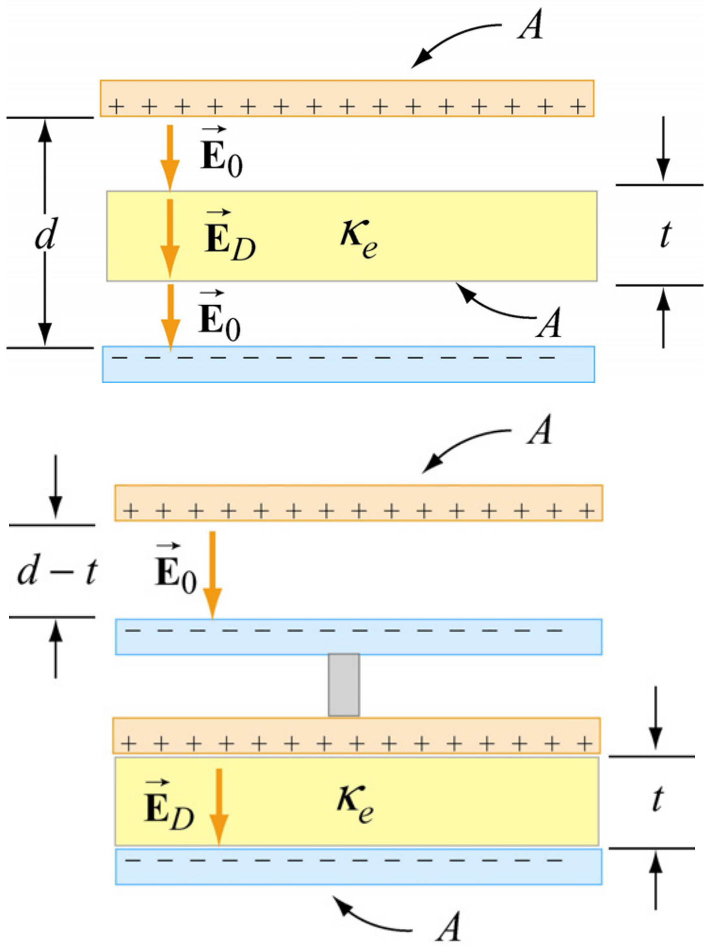
Capacitores con dieléctricos (1)



- Invirtiendo C tenemos:

$$\frac{1}{C} = \frac{d - t}{A\epsilon_0} + \frac{t}{A\kappa_e\epsilon_0}$$

Capacitores con dieléctricos (1)

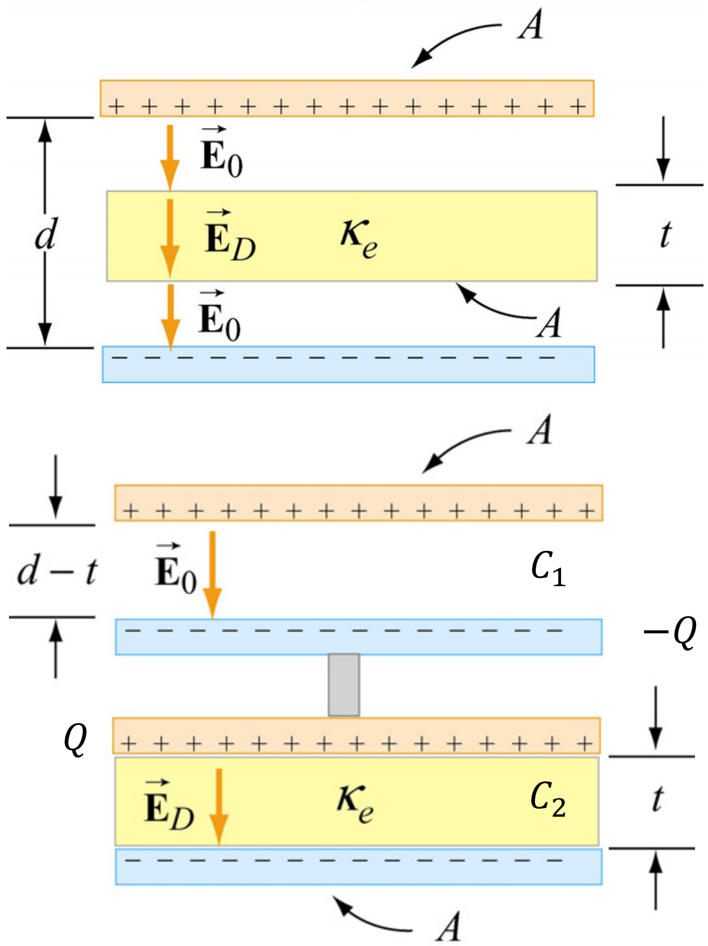


- Invirtiendo C tenemos:

$$\frac{1}{C} = \frac{d - t}{A\epsilon_0} + \frac{t}{A\kappa_e\epsilon_0}$$

- Esto es la suma de las inversas de las capacidades de un capacitor en el vacío de espesor $d - t$ y de otro con dieléctrico de espesor t, ambos con carga Q.

Capacitores con dieléctricos (1)



- En otras palabras:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- Los capacitores tienen un conductor en común que es un equipotencial, de un lado tiene carga Q del otro $-Q$.

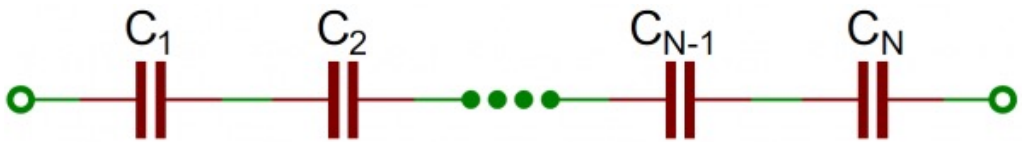
- Esta configuración se denomina *'en serie'*

Capacitores en serie

- El resultado anterior:

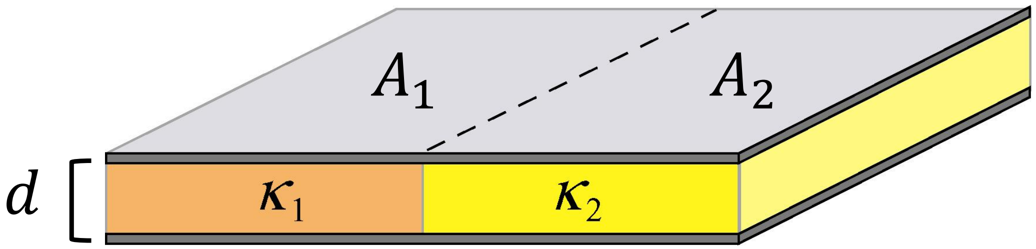
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- Puede extenderse a los capacitores en el vacío trivialmente ($\kappa_e = 1$) y a un número arbitrario de capacitores en serie.



$$\frac{1}{C_{Tot}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_{N-1}} + \frac{1}{C_N}$$

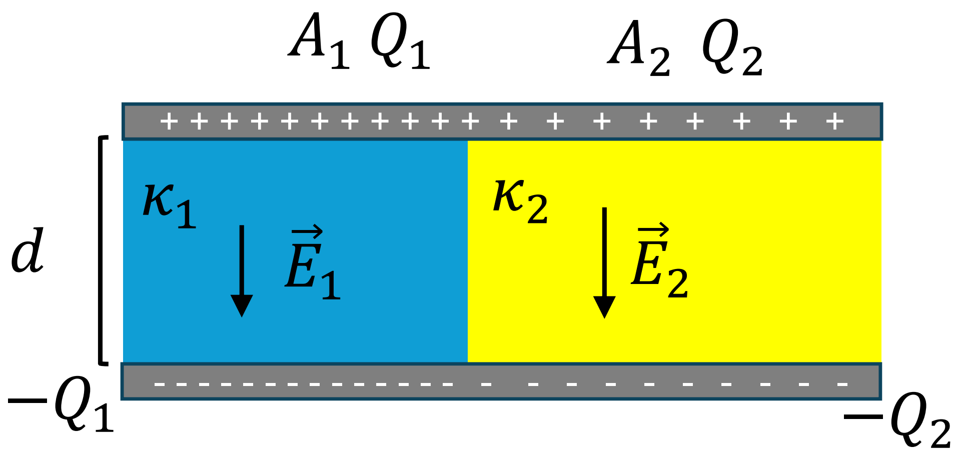
Capacitores con dieléctricos (2)



- Supongamos ahora un capacitor de área A y espesor d pequeño con carga Q, y diferencia de potencial $\Delta\varphi$.

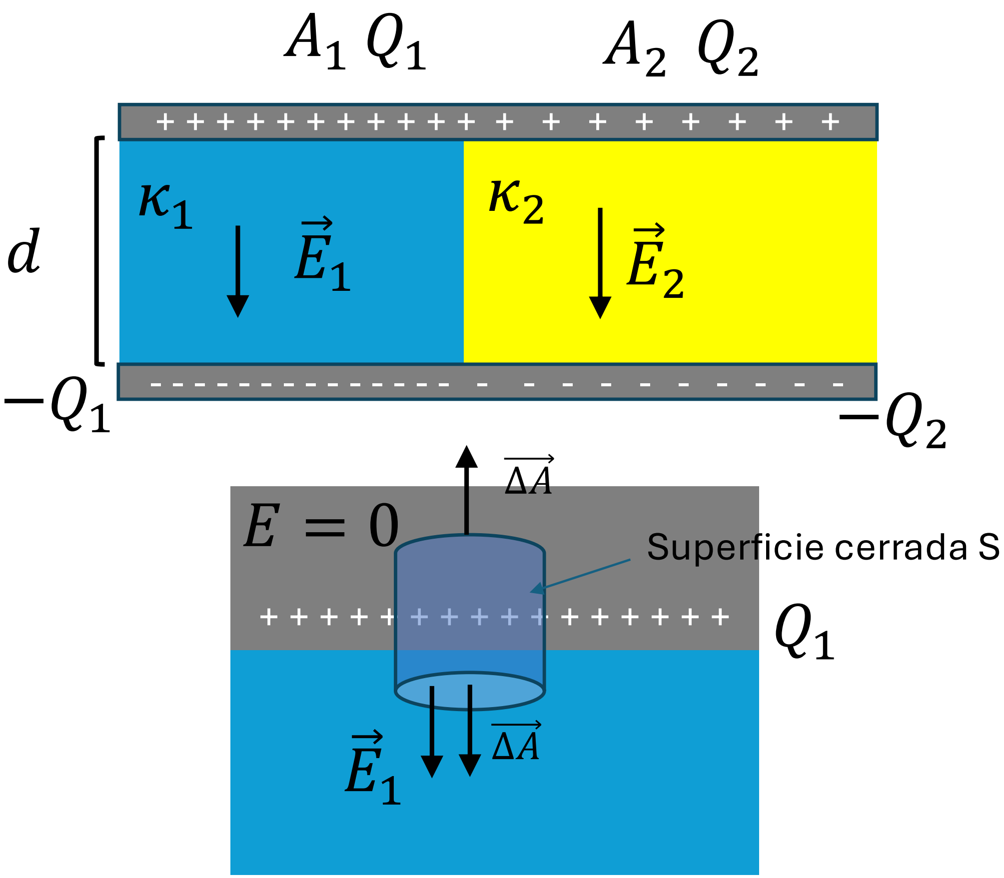
- Se llena todo el espacio entre placas con dos dieléctricos de constantes κ_1 y κ_2 de áreas $A_1 + A_2 = A$.

Capacitores con dieléctricos (2)



- La superficie de cada conductor es una equipotencial.
- Por lo tanto la diferencia de potencial para cada dieléctrico es la misma
- Vamos a permitir que la carga total en cada placa se redistribuya sobre cada dieléctrico $Q = Q_1 + Q_2$.

Capacitores con dieléctricos (2)



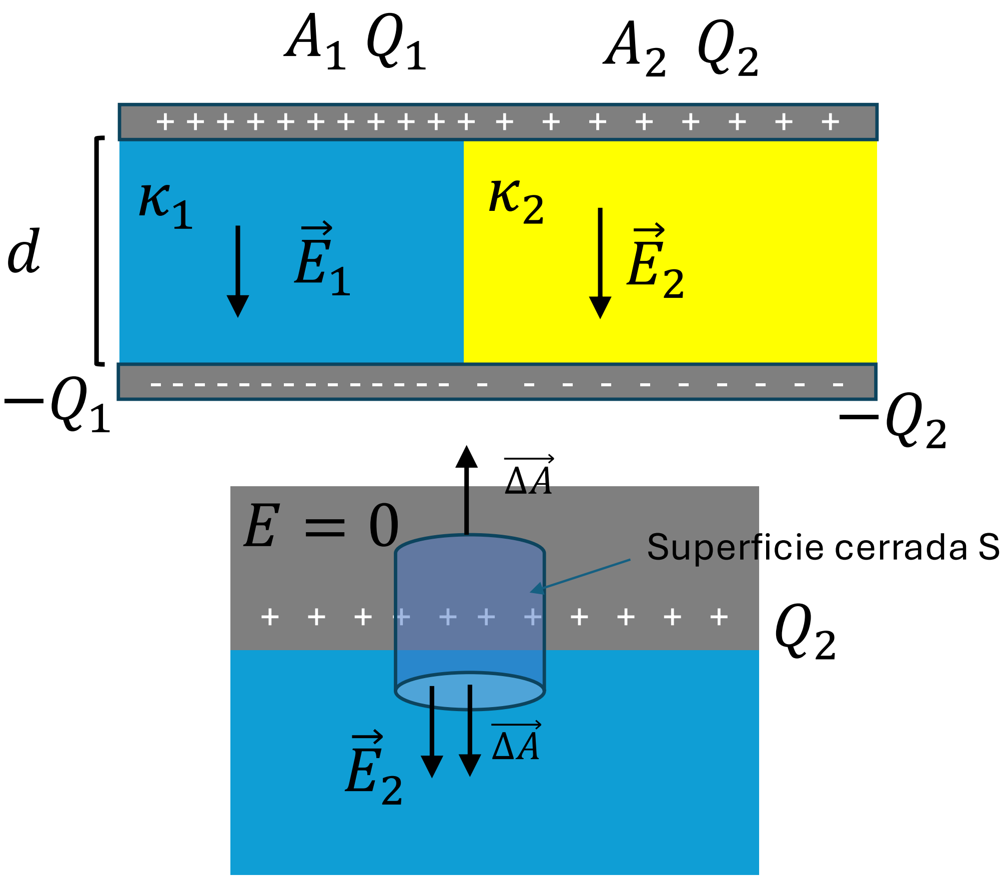
- Por Ley de Gauss para dieléctricos

$$\int_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{da} = carga\ libre\ encerrada$$

$$\kappa_1 \epsilon_0 E_1 \Delta A = \frac{Q_1}{A_1} \Delta A$$

$$E_1 = \frac{Q_1}{A_1 \kappa_1 \epsilon_0}$$

Capacitores con dieléctricos (2)



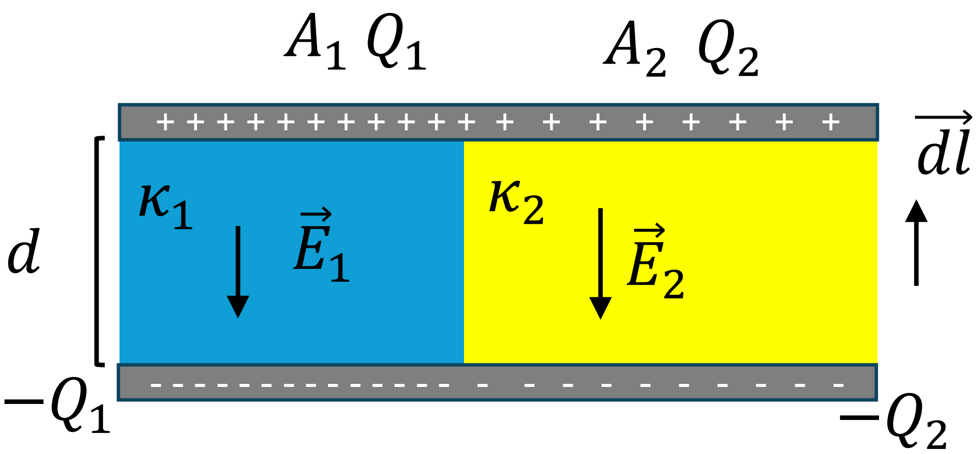
- Por Ley de Gauss para dieléctricos

$$\int_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{da} = carga\ libre\ encerrada$$

$$\kappa_2 \epsilon_0 E_2 \Delta A = \frac{Q_2}{A_2} \Delta A$$

$$E_2 = \frac{Q_2}{A_2 \kappa_2 \epsilon_0}$$

Capacitores con dieléctricos (2)



- Como la diferencia de potencial es la misma para ambos dieléctricos

$$-\int_-^+ \vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_-^+ \vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{dl}$$

$$\Delta V = E_1 d = E_2 d$$

$$\frac{Q_1 d}{A_1 \kappa_1 \epsilon_0} = \frac{Q_2 d}{A_2 \kappa_2 \epsilon_0}$$

Capacitores con dieléctricos (2)

- De la cuenta anterior:

$$Q_2 \; = A_2\kappa_2 \frac{Q_1}{A_1\kappa_1}$$

- Entonces, la capacidad total es

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_1 + Q_2}{\frac{Q_1 d}{A_1\kappa_1\epsilon_0}}$$

- Reemplazando Q_2 tenemos

Capacitores con dieléctricos (2)

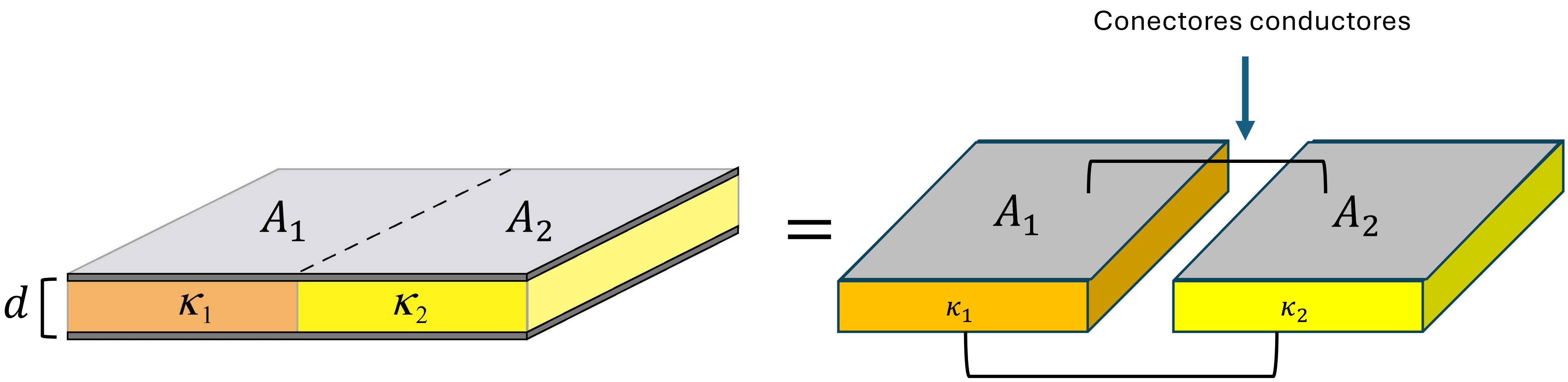
- Reemplazando Q_2 tenemos

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_1 + A_2\kappa_2 \frac{Q_1}{A_1\kappa_1}}{\frac{Q_1 d}{A_1\kappa_1\epsilon_0}}$$

- Entonces

$$C = \frac{1 + A_2\kappa_2 \frac{1}{A_1\kappa_1}}{\frac{d}{A_1\kappa_1\epsilon_0}} = \frac{A_1\kappa_1\epsilon_0 + A_2\kappa_2 \frac{A_1\kappa_1\epsilon_0}{A_1\kappa_1}}{d} = \frac{A_1\kappa_1\epsilon_0}{d} + \frac{A_2\kappa_2\epsilon_0}{d}$$

Capacitores en paralelo



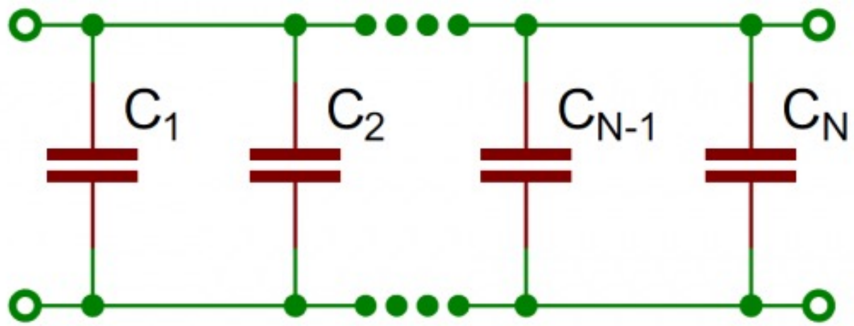
$$C = C_1 + C_2$$

Capacitores en paralelo

- Entonces, en general, la capacidad equivalente C de dos capacitores 'en paralelo' (C_1 y C_2) tenemos:

$$C = C_1 + C_2$$

- Extendido a N capacitores



$$C_{Tot} = C_1 + C_2 + \ldots + C_{N-1} + C_N$$