

### Problema 1 (10p)

Se tiene un disco de radio  $R$  cargado con una densidad de carga superficial  $\sigma(\varphi) = \sigma_0 \cos(\varphi)$ .

- (2p) Calcular la carga total contenida en el disco.
- (4p) Calcular el campo eléctrico en todos los puntos sobre el eje del disco para  $z > 0$ .
- (2p) Calcular el primer momento no nulo de la expansión multipolar del campo.
- (2p) Con el resultado de los items b) y c), verificar que para  $z \gg R$  el campo está dado por la expansión multipolar:

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

### Problema 2 (10p)

Se tiene un conductor esférico de radio  $a$  conectado a un potencial constante  $V_0$  ( $V_\infty = 0$ ). El conductor se encuentra dentro de un cascarón de radio  $b$  cargado con densidad de carga uniforme  $\sigma$ . Entre el conductor y el cascarón, el espacio está lleno de un medio dieléctrico lineal, isótropo y homogéneo de permitividad  $\epsilon$ .

- (2p) Indicar cuáles son y donde se encuentran las fuentes de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$ .
- (4p) Hallar  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  y  $\vec{P}$  en todo el espacio.
- (3p) Calcular explícitamente las densidades de carga de polarización del dieléctrico.
- (1p) ¿Qué relación deben cumplir los datos del problema ( $V_0, a, b, \sigma, \epsilon$ ) para que no se induzcan cargas sobre el conductor? ¿Cuánto vale la polarización en ese caso? Interprete.

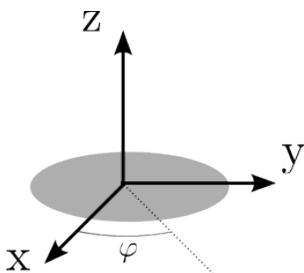


Figura 1: Problema 1

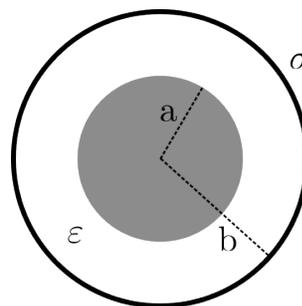


Figura 2: Problema 2

Ayudas: (para el problema 1)

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(x) \sin(x) dx = 0$$

$$\int \frac{x^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx = -\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \log(\sqrt{a^2 + x^2} + x) + C$$

$$\log\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{a}\right) = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{6a^3} + \mathcal{O}(a^4)$$

con  $a > 0$