

Física 3: Electricidad y Magnetismo

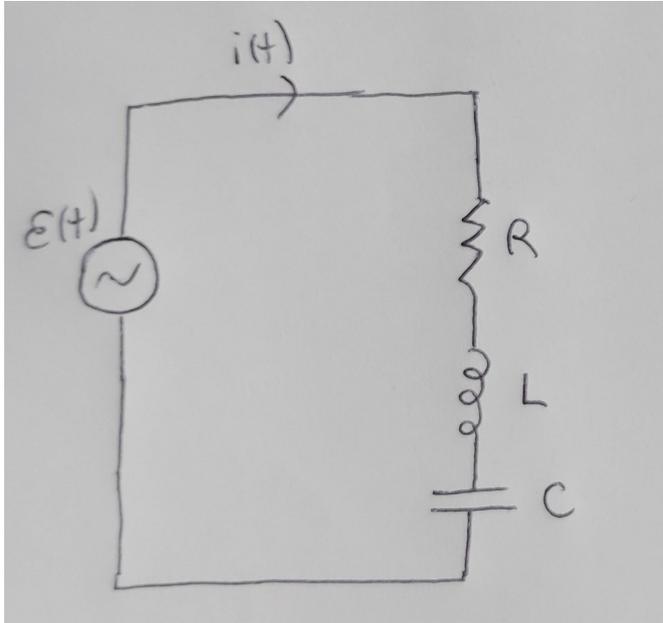
Pablo Dmitruk

Clase 21

Corriente alterna

Consideremos el circuito RLC nuevamente, pero cambiamos la batería por una fuente de voltaje alterno

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \varphi_\varepsilon)$$



Tenemos
$$\varepsilon(t) = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \quad , \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\varepsilon(t) = R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q$$

Nuevamente hacemos $q = q_h + q_p$

Pero ahora no podemos encontrar una $q_p = cte$ como hicimos antes, ya que la f.e.m. en la ecuación diferencial varía en el tiempo \rightarrow *vamos a proponer una solución particular $q_p(t)$ que varíe en el tiempo sinusoidalmente y con la misma frecuencia ω que la f.e.m. forzante.*

La solución del homogéneo nos va a dar la parte transitoria que es lo que ya vimos antes, y ahora no nos interesa obtener \rightarrow lo que buscamos es la solución a tiempos mayores, que ya no va a ser constante.

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t) \xrightarrow{t \gg \tau} q_p(t) = q_0 \cos(\omega t + \varphi_q)$$

Vamos a trabajar con funciones complejas

$$\varepsilon(t) = \text{Re}\{\varepsilon_0 e^{j(\omega t + \varphi_\varepsilon)}\} = \text{Re}\{\varepsilon e^{j\omega t}\}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{j\varphi_\varepsilon} \in \mathbb{C}$$

$$j^2 = -1$$

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

$$e^{j\pi} + 1 = 0$$

$\varepsilon(t)$ = valor instantáneo f.e.m.

$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{j\varphi_\varepsilon}$ = amplitud compleja de la f.e.m. \rightarrow número complejo

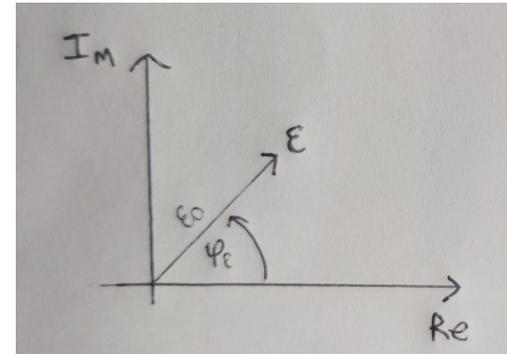
$\varepsilon_0 = |\varepsilon|$ = amplitud real o valor pico de la f.e.m. \rightarrow número real

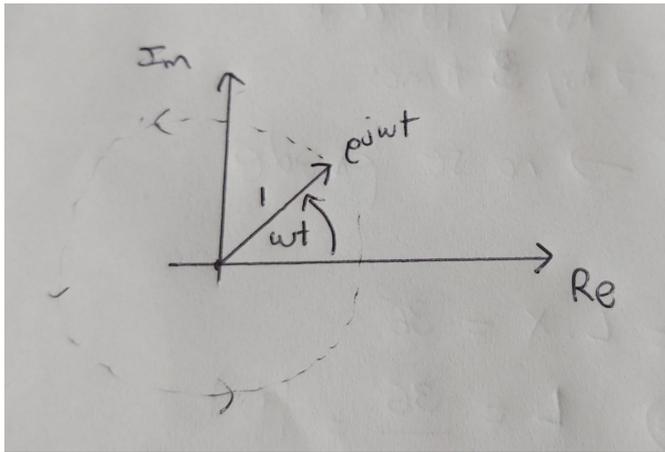
$\varphi_\varepsilon = \text{arg}(\varepsilon)$ = fase inicial de la f.e.m.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{j\varphi_\varepsilon} = \varepsilon_0 (\cos \varphi_\varepsilon + j \sin \varphi_\varepsilon)$$

Multiplicando por $e^{j\omega t} \rightarrow \varepsilon e^{j\omega t} = \varepsilon_0 e^{j\varphi_\varepsilon} e^{j\omega t} = \varepsilon_0 e^{j(\omega t + \varphi_\varepsilon)}$

obtenemos la **f.e.m. compleja**





El factor complejo $e^{j\omega t}$ se llama **fasor**, es un número complejo que va rotando en el tiempo, con frecuencia ω y amplitud unitaria y le da el carácter temporal a una variable compleja.

$$|e^{j\omega t}| = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$$

Las funciones de respuesta, es decir, la carga y la corriente las vamos a tratar también como funciones complejas (de la misma frecuencia temporal) y entonces hacemos:

$$q(t) = \text{Re}\{q_0 e^{j(\omega t + \varphi_q)}\} = \text{Re}\{Q e^{j\omega t}\} \quad Q = q_0 e^{j\varphi_q} \in \mathbb{C}$$

$$i(t) = \text{Re}\{i_0 e^{j(\omega t + \varphi_i)}\} = \text{Re}\{I e^{j\omega t}\} \quad I = i_0 e^{j\varphi_i} \in \mathbb{C}$$

que además están relacionadas ya que $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \rightarrow I = j\omega Q$

Volvamos a la ecuación diferencial,

$$\varepsilon(t) = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \quad , \quad i = \frac{dq}{dt}$$

que podemos poner también en términos de la corriente, derivando en el tiempo,

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C}$$

Si reemplazamos con las funciones complejas,

$$j \omega \varepsilon_0 e^{j\varphi_\varepsilon} e^{j\omega t} = R j \omega i_0 e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} + L j^2 \omega^2 i_0 e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} + \frac{1}{C} i_0 e^{j\varphi_i} e^{j\omega t}$$

$$j \omega \varepsilon_0 e^{j\varphi_\varepsilon} = R j \omega i_0 e^{j\varphi_i} + L j^2 \omega^2 i_0 e^{j\varphi_i} + \frac{1}{C} i_0 e^{j\varphi_i} \quad \rightarrow \text{eliminamos el tiempo y quedó una ecuación algebraica}$$

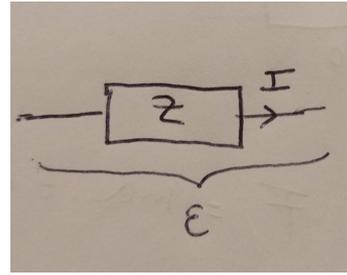
$$j \omega \varepsilon = R j \omega I + L j^2 \omega^2 I + \frac{1}{C} I$$

$$\varepsilon = R I + j\omega L I + \frac{1}{j\omega C} I = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) I = Z I$$

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad \text{es la impedancia del circuito RLC}$$

La ecuación $\varepsilon = Z I$ se puede ver como una

ley de Ohm en amplitudes complejas.



En el circuito RLC se tiene $Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$ que podemos pensarlo como las impedancias en serie de una resistencia, una inductancia y un capacitor,

$$Z_R = R \quad , \quad Z_L = j\omega L \quad , \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

En general, $Z = |Z| e^{j\varphi_Z} \in \mathbb{C}$

$$Z_R = R = R e^{j0} \rightarrow |Z_R| = R \quad , \quad \varphi_{Z_R} = 0$$

$$Z_L = j\omega L = \omega L e^{j\pi/2} \rightarrow |Z_L| = \omega L \quad , \quad \varphi_{Z_L} = \pi/2$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} \rightarrow |Z_C| = \frac{1}{\omega C} \quad , \quad \varphi_{Z_C} = -\pi/2$$

En cada impedancia podemos asociar una tensión compleja, según la ley de Ohm $\varepsilon = Z I$

$$\varepsilon_R = Z_R I \quad \varepsilon_L = Z_L I \quad \varepsilon_C = Z_C I$$

Las impedancias introducen un *desfasaje* entre tensión y corriente:

Para una resistencia: $i_0 e^{j\varphi_i} = I = \frac{\varepsilon}{Z_R} = \frac{\varepsilon_0}{R} e^{j\varphi_\varepsilon} \rightarrow i_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}$, $\varphi_i = \varphi_\varepsilon$ no hay desfasaje

Para una inductancia: $i_0 e^{j\varphi_i} = I = \frac{\varepsilon}{Z_L} = \frac{\varepsilon_0 e^{j\varphi_\varepsilon}}{\omega L e^{j\pi/2}} \rightarrow i_0 = \frac{\varepsilon_0}{\omega L}$, $\varphi_i = \varphi_\varepsilon - \frac{\pi}{2}$

Para un capacitor: $i_0 e^{j\varphi_i} = I = \frac{\varepsilon}{Z_C} = \varepsilon_0 e^{j\varphi_\varepsilon} \omega C e^{j\pi/2} \rightarrow i_0 = \varepsilon_0 \omega C$, $\varphi_i = \varphi_\varepsilon + \frac{\pi}{2}$

La inductancia y el capacitor desfasan la corriente respecto a la tensión (f.e.m.) en $\pi/2$

Notar que en general además (salvo para la resistencia) la impedancia depende de la frecuencia $Z = Z(\omega)$

siendo el módulo (y por lo tanto la amplitud real de la corriente resultante) controlado por la frecuencia.

Para una inductancia, $|Z_L| = \omega L$, entonces la impedancia aumenta con la frecuencia \rightarrow deja pasar menos corriente si aumenta la frecuencia \rightarrow tiene sentido por Faraday !

Para un capacitor, $|Z_C| = \frac{1}{\omega C}$, y la impedancia aumenta cuando la frecuencia es chica \rightarrow deja pasar menos corriente al disminuir la frecuencia \rightarrow capacitor se cargó completamente

En general decimos $Z(\omega) = R(\omega) + j X(\omega)$

resistencia

reactancia

$$Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)}$$

se llama la admitancia

conductancia

susceptancia

$$Y(\omega) = G(\omega) + j B(\omega)$$

Los circuitos de corriente alterna se resuelven aplicando leyes análogas a las de Kirchoff pero para las tensiones y corrientes complejas, donde los elementos son las impedancias que juegan el rol de las resistencias en los circuitos de corriente continua.

Impedancia serie $Z_{\Sigma} = \sum_{k=1}^N Z_k$

Impedancia paralelo $Z_{\parallel}^{-1} = \sum_{k=1}^N Z_k^{-1}$

y empleamos $\sum_k I_k = 0 \rightarrow$ nodos

$$\sum_j \varepsilon_j = \sum_k I_k Z_k \rightarrow \text{tensiones complejas}$$

una vez que resolvemos el sistema algebraico y obtenemos las corrientes complejas, si queremos las corrientes reales, multiplicamos por $e^{j\omega t}$ y tomamos la parte real.

Valor eficaz de una cantidad periódica

Supongamos una f.e.m. variable en el tiempo como un coseno (también podríamos considerar una corriente variable en el tiempo),

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$

Si calculamos el valor medio (temporal) sobre un período de oscilación,

$$\langle \varepsilon(t) \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \varepsilon_0 \cos(\omega t) dt = \frac{\varepsilon_0 \sin(\omega t)}{\omega} \Big|_0^{2\pi/\omega} = 0$$

Definimos el valor eficaz como:

$$\varepsilon_{ef} = \langle (\varepsilon(t) - \langle \varepsilon \rangle)^2 \rangle^{1/2} = \left[\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \varepsilon_0^2 \cos^2(\omega t) dt \right]^{1/2} = \left[\frac{\varepsilon_0^2}{2} \right]^{1/2} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}$$

El voltaje en los hogares cuando decimos “220 V” corresponde al valor eficaz, por lo que el **pico de tensión** es :

$$\varepsilon_0 = \sqrt{2} \varepsilon_{ef} = \sqrt{2} 220 V = 311 V$$

Potencia en circuitos de corriente alterna

La potencia instantánea es $P(t) = i(t) \varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$


$$P(t) = \varepsilon_0 i_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) = \frac{\varepsilon_0 i_0}{2} [\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi]$$

$$\langle P(t) \rangle = \frac{\varepsilon_0 i_0}{2} \cos \varphi = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} \frac{i_0}{\sqrt{2}} \cos \varphi = \varepsilon_{ef} i_{ef} \cos \varphi$$

Si en un tramo de un circuito aplicamos Ohm para la tensión y corriente compleja, tenemos

$$\varepsilon = Z I \quad \rightarrow \quad \varepsilon_0 = |Z| i_0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{ef} = |Z| i_{ef}$$

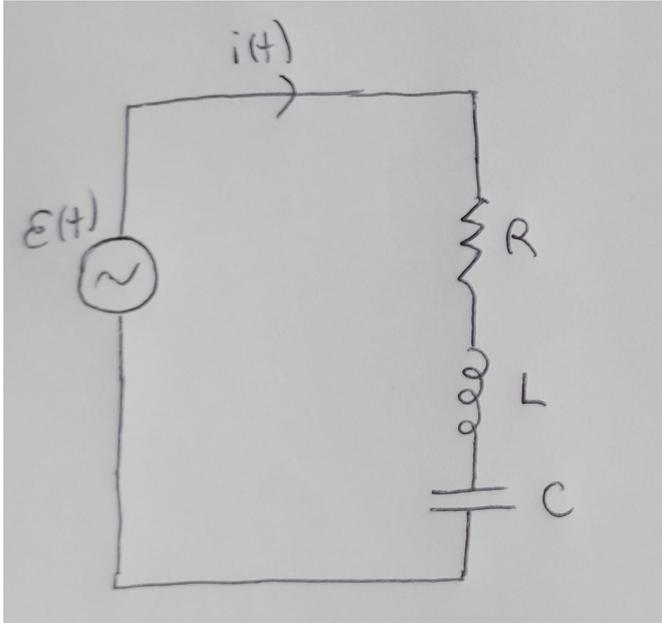
y si $Z = R + jX = |Z| e^{j\varphi} \quad \rightarrow \quad \cos \varphi = \frac{R}{|Z|}$

La potencia media disipada en ese tramo se puede escribir entonces como,

$$\langle P \rangle = \varepsilon_{ef} i_{ef} \cos \varphi = |Z| i_{ef}^2 \frac{R}{|Z|} = i_{ef}^2 R$$

es decir obtenemos una ley análoga a la de Joule pero para la potencia media disipada, y en donde R es la parte real de la impedancia en ese tramo y la corriente es el valor eficaz.

Resonancia en el circuito RLC serie



De la relación entre amplitudes complejas que obtuvimos,

$$\varepsilon = Z I \quad \rightarrow \quad \varepsilon_0 = |Z| i_0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{ef} = |Z| i_{ef}$$

$$Z = R + jX \quad |Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$i_{ef} = \frac{\varepsilon_{ef}}{|Z|} \quad \rightarrow \quad \langle P \rangle = i_{ef}^2 R = \frac{\varepsilon_{ef}^2}{|Z|^2} R = \frac{\varepsilon_{ef}^2 R}{R^2 + X^2}$$

$$X = X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

vemos que la potencia disipada será máxima si la reactancia X es mínima

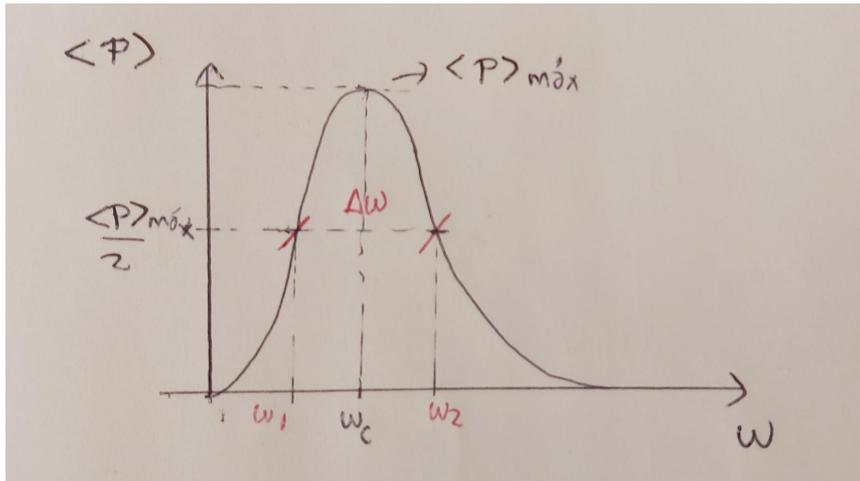
→ el máximo de potencia disipada se obtiene si $X=0$, es decir si $\omega L = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_c$

Notar que en ese caso la corriente y la f.e.m. están en fase

A la frecuencia $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_c$ la llamamos la **frecuencia de resonancia**, y es la frecuencia (de la f.e.m.) que nos da la máxima potencia disipada.

$$\langle P \rangle (\omega) = \frac{\varepsilon_{ef}^2 R}{R^2 + X^2} = \frac{\varepsilon_{ef}^2 R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{\varepsilon_{ef}^2}{R} \frac{(R/L)^2 \omega^2}{(R/L)^2 \omega^2 + (\omega^2 - \omega_c^2)^2} = \frac{\varepsilon_{ef}^2}{R} \frac{(2\alpha\omega)^2}{(2\alpha\omega)^2 + (\omega^2 - \omega_c^2)^2}$$

$\alpha = \frac{R}{2L}$



$$\langle P \rangle_{max} = \langle P \rangle (\omega = \omega_c) = \frac{\varepsilon_{ef}^2}{R}$$

De la condición $\langle P \rangle (\omega) = \langle P \rangle_{max} / 2$

obtenemos los valores de ω_1 , ω_2

$$\rightarrow \frac{(2\alpha\omega)^2}{(2\alpha\omega)^2 + (\omega^2 - \omega_c^2)^2} = \frac{1}{2}$$

ancho de banda

→ salen 4 raíces, descartamos las dos negativas y nos quedan $\omega_{1,2} = \pm\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_c^2}$ → $\Delta\omega = 2\alpha = \frac{R}{L}$

Se define el **factor de calidad**, $Q = \frac{\omega_c}{\Delta\omega} \rightarrow Q = \frac{\omega_c L}{R} = \frac{R_c}{2R}$ con $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Si $Q \gg 1$ se transmite potencia en una banda estrecha de frecuencias \rightarrow sirve como **sintonizador**

Lo usual es ajustar la frecuencia de resonancia con un capacitor C variable

Un ejemplo numérico $R = 60 \Omega$, $L = 0.1 H$, $C = 8 \mu F \rightarrow \omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 1100 Hz$

$$\Delta\omega = \frac{R}{L} = 600 Hz , Q = \frac{\omega_c}{\Delta\omega} \approx 2$$

Si alimentamos este circuito enchufándolo a una toma de $\varepsilon_{ef} = 220 V$ y $\omega = 2\pi 50 Hz = 314 Hz$

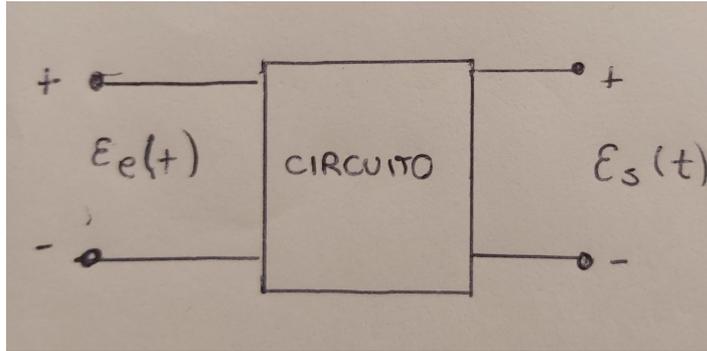
$$\rightarrow \omega L = 31 \Omega , \frac{1}{\omega C} = 398 \Omega \rightarrow |Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = 371 \Omega \quad i_{ef} = \frac{\varepsilon_{ef}}{|Z|} \approx 0.6 A \rightarrow \langle P \rangle_{max} = i_{ef}^2 R = 22 W$$

Para aumentar la potencia (sin variar la frecuencia) buscamos $\omega L = \frac{1}{\omega C}$

que podemos lograrlo cambiando L o C

$$\frac{1}{\omega C} = 31 \Omega \rightarrow C = 100 \mu F \rightarrow |Z| = 60 \Omega , i_{ef} = 3.7 A \rightarrow \langle P \rangle_{max} = 800 W$$

Filtros



$$\varepsilon_e(t) = \text{Re}\{\varepsilon_e e^{j\omega t}\}$$

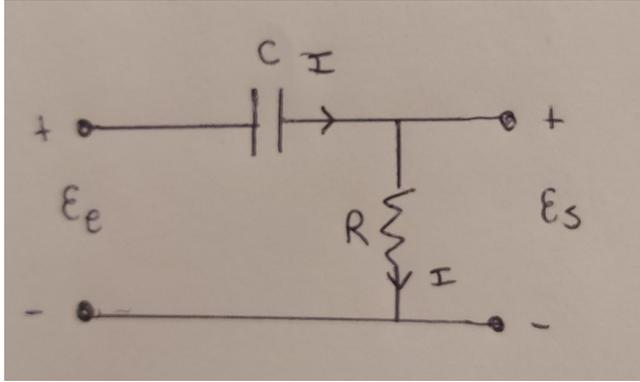
$$\varepsilon_s(t) = \text{Re}\{\varepsilon_s e^{j\omega t}\}$$

La **función de transferencia** se define como:

$$T(\omega) = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_e} = |T| e^{j\varphi}$$

$$|T| = \frac{|\varepsilon_s|}{|\varepsilon_e|}, \quad \varphi = \text{arg}(T) = \text{arg}(\varepsilon_s) - \text{arg}(\varepsilon_e)$$

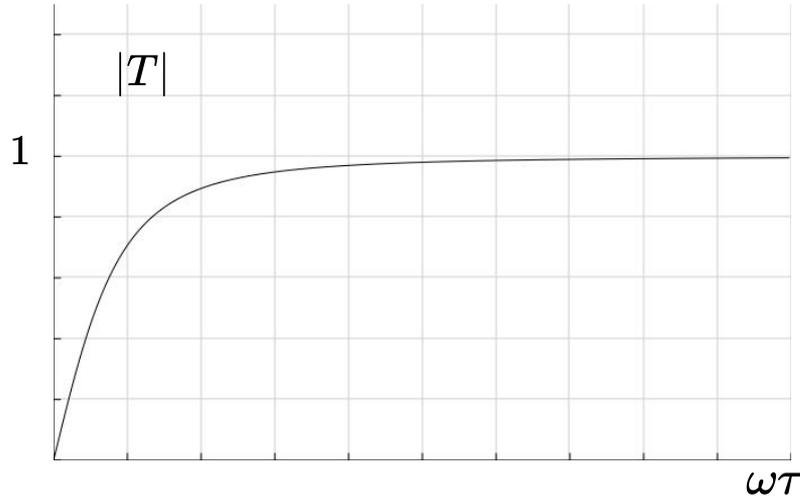
Filtro pasa-altos



$$\epsilon_s = R I = R \frac{\epsilon_e}{Z} = \frac{R \epsilon_e}{R + 1/j\omega C} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \epsilon_e$$

$$T = \frac{\epsilon_s}{\epsilon_e} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}, \quad \tau = RC$$

$$|T| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega\tau)$$

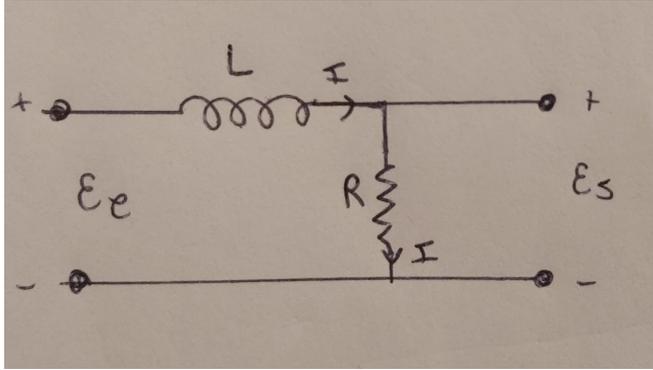


$$\omega \rightarrow 0, \quad |T| \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad |T| \rightarrow 1, \quad \varphi \rightarrow 0$$

Es decir, pasan las frecuencias altas

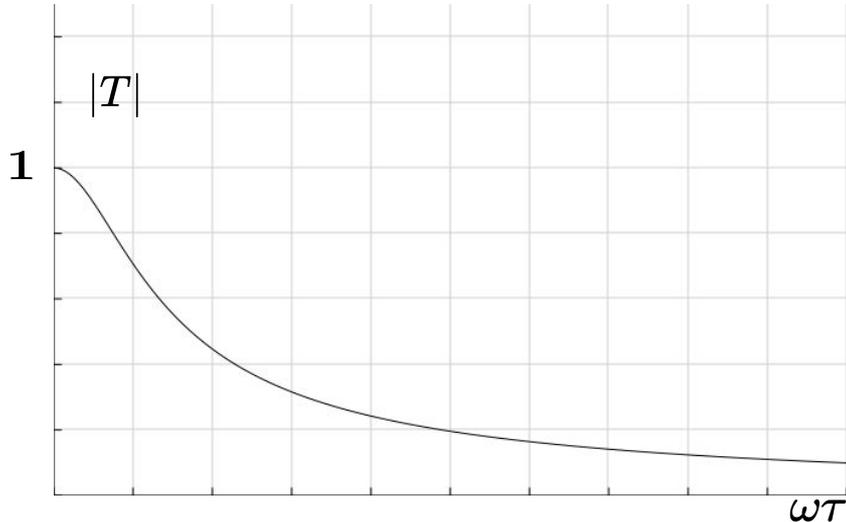
Filtro pasa-bajos



$$\mathcal{E}_s = R I = R \frac{\mathcal{E}_e}{Z} = \frac{R \mathcal{E}_e}{R + j\omega L}$$

$$T = \frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_e} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}, \quad \tau = \frac{L}{R}$$

$$|T| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}, \quad \varphi = -\arctan(\omega\tau)$$



$$\omega \rightarrow 0, \quad |T| \rightarrow 1, \quad \varphi \rightarrow 0$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad |T| \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

Es decir, pasan las frecuencias bajas

Tiene sentido ya que por Faraday la f.e.m. inducida (que se opone a la f.e.m. de entrada) será mayor si las frecuencias son altas y la corriente varía más rápidamente.