Problemas de Física 4 §
Atomo de Bohr y Ondas de Materia

1. **Cálculos Básicos átomo de Bohr**

   (a) Demostrar que el modelo de Bohr cumple con el *teorema virial*: $E = K + U = \frac{U}{2}$.

   (b) Calcular la longitud de onda H_α, H_β y H_γ, (serie Balmer, $n_{low} = 2$) para el H, Li^{2+} y U^{91+}.

   (c) El tiempo de vida del primer estado excitado del H es $t = 10^{-8}$ sec. ¿Cuántas vueltas da un electrón en ese estado, según el modelo de Bohr?

2. **Espectro del Hidrógeno e Hidrogénicos**

   (a) Diagramar el espectro de los 4 primeros niveles de energía del He^+.

   (b) Calcular la energía de ionización del Hidrógeno utilizando el siguiente dato: la longitud de onda mas corta en la serie de Balmer es 3650 Å.

   (c) La longitud de onda mas corta en la serie de Paschen es 8201 Å. Encontrar las 3 longitudes de onda mas largas de esta serie.

   (d) El cociente entre las longitudes de onda mas larga en la serie de Lyman y Balmer es:

   (a) $\frac{5}{27}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{4}{9}$ (d) $\frac{3}{2}$ (e) ninguna de las anteriores

   (e) Los números atómicos del Carbono y del Hierro son $Z_C = 6$ y $Z_{Fe} = 26$. Sea $E_C(27 \to 1)$ la energía de transición entre los niveles 27 y 1 en el C, y $E_{Fe}(2 \to 1)$ la energía entre los niveles 2 y 1 en el Fe.
   Definimos $R \equiv \frac{E_C(27\to 1)}{E_{Fe}(2\to 1)}$.
   Elegir la respuesta correcta:

(a) $R < (\frac{6}{27})^2$ (b) $R > (\frac{6}{27})^2$ (c) $R = 1$ (d) $R = \frac{6^2}{27^2}\frac{(27^2-1)}{(4^2-1)}$ (e) ninguna de las anteriores

3. **Líneas de Pickering–Fowler**:
   Alfred Fowler, un espectroscopista alemán, encontró líneas espectrales, en una mezcla de H y He (algunas habían sido encontradas también en espectros estelares por Pickering). El problema era que correspondían al espectro de H, pero para orbitales semi–enteros. La explicación que dió Bohr, es que su modelo también se podía usar, reemplazando en la fórmula para la constante de Rydberg e^2 por $2e^2$, de manera de corregir la doble carga del núcleo. De este modo Bohr explicó que las nuevas líneas espectrales provenían del He. Fowler, que era un experimentalista muy preciso, podía medir las líneas espectrales con cinco figuras significativas. Por lo tanto, a pesar de las incertidumbres en los valores de e, m y h, la relación de la "constante de Rydberg" entre He y H se podía hallar con gran certeza. El valor encontrado por Fowler no era 4, sino 4.0016. ¿Si usted fuese Bohr, qué le respondería a Fowler?

§ http://www.df.uba.ar/users/dmitnik/fisica4

4. **Correcciones al modelo de Bohr**:

   (a) Determinar el cociente entre la masa del Deuterio y la del Hidrógeno, dadas las líneas espectrales H_α (6561.01 Å y 6562.8 Å, respectivamente). Datos de NIST: $\frac{m_e}{m_p} = 5.446170232 \times 10^{-4}$.

   (b) Calcular la velocidad que tiene un electrón en la órbita $n = 1$ y en la $n = 1000$. Repetir el cálculo para U^{91+}.

5. **Principio de Correspondencia**:

   (a) Según la física clásica, una partícula cargada que gira, emite una radiación cuya frecuencia es igual a su frecuencia angular. El *principio de correspondencia de Bohr* enuncia que los resultados de la física cuántica deben coincidir con los resultados clásicos para grandes dimensiones (o sea, cuando los resultados clásicos coinciden con los experimentales). Utilizar el modelo de Bohr para calcular la frecuencia de emisión en H, cuando un electrón pasa de una órbita n, a una $(n-1)$.

      i. Graficar las diferencias entre los resultados cuánticos y clásicos, en función de n. ¿Se cumple el principio de correspondencia?

      ii. Repetir el gráfico, pero ahora en función del radio atómico.

      iii. Demostrar que $\Delta E_n \approx \alpha^2(mc^2/n^3)$ (α es la constante de estructura fina).

      iv. Suponer que sólo se pueden diferenciar niveles que estén separados por un $\Delta E > h/\Delta_t$, y que los tiempos de vida de los estados excitados son del orden de 10^{-8} sec. ¿Cuál es el máximo n desde el cual se puede detectar la transición $n \to (n-1)$? ¿Cuál es el radio de éste átomo?

6. **Regla de cuantificación de Wilson–Sommerfeld**:

   (a) Verificar que el modelo de Bohr es consistente con esta regla: $L = n\hbar$.

   (b) Verificar que usando esta regla para una partícula que oscila armónicamente con frecuencia ν, se obtiene la expresión de cuantificación de Planck $E = n\nu$.

   (c) (∗∗) Usando la regla de cuantificación de Wilson–Sommerfeld, calcular los niveles de energía de una pelota rebotando en un campo gravitatorio.
   Ayuda: Solucionar el problema para un potencial $V(x)$:

$$\begin{cases} (\frac{V_0}{a})x & 0 < x < a \\ V_0 & x > a \end{cases}$$

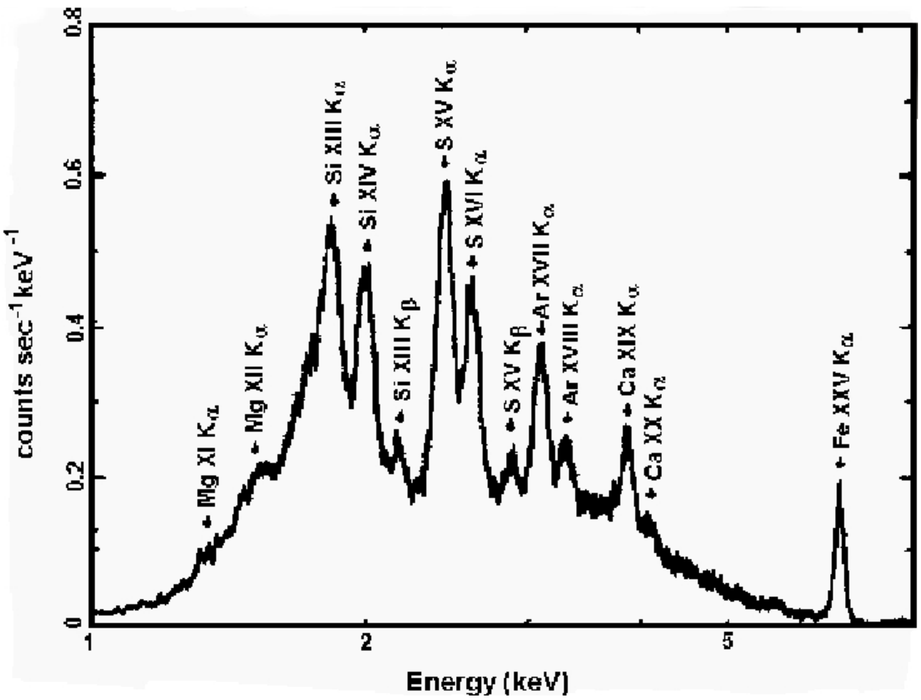
   determinando las energías posibles para los casos $E_n < V_0$. El resultado deberá ser una función $E_n(n, V_0/a)$, o sea, sólo depende de la pendiente del potencial, y no de los valores separados de V_0 y a.

7. **Problemas auxiliares**:

   (a) Determinar el cociente entre la masa del Deuterio y la del Hidrógeno, dadas las líneas espectrales H_α (6561.01 Å y 6562.8 Å, respectivamente). Datos de NIST: $\frac{m_e}{m_p} = 5.446170232 \times 10^{-4}$.

(b) Calcular la velocidad que tiene un electrón en el átomo de hidrógeno, en la órbita $n = 1$ y en la $n = 1000$. Repetir el cálculo para U^{91+}.

(c) El espectro siguiente corresponde a un plasma, compuesto por diversos elementos, tales como Fe, Ca, ar, Si y Mg. Identificar las posibles transiciones K_α, de los correspondientes iones hidrogénicos.



Ondas de Materia y Principio de Incertidumbre

1. **Experimento de Davisson–Germer**
   La separación entre los planos de un cristal de Ni es de $d = 2.15$ Å. Se encontró un máximo en la dispersión de electrones a 50° respecto al plano incidente.

   (a) ¿Cuál es la longitud de onda correspondiente a los electrones?

   (b) Si los electrones estaban acelerados con una diferencia de potencial de 54 eV, ¿cuál es la longitud de onda de De Broglie correspondiente?

   (c) ¿Qué hubiese pasado si el voltaje aplicado era de 30 V?

2. Ordenar de menor a mayor las siguientes longitudes de onda de De Broglie:

   (a) un electrón acelerado con 1 V.

   (b) un sandwich de milanesa viajando a $\frac{c}{2}$

   (c) un electrón acelerado con 100 MV.

(a) a,b,c (b) a,c,b (c) b,c,a (d) b,a,c (e) ninguna de las anteriores

3. Una partícula de masa m y carga q se acelera mediante una diferencia de potencial V, hasta que esta obtiene una velocidad no relativista v.

   (a) La longitud de onda de de Broglie de la partícula es:

(a) $\lambda = \frac{m}{\sqrt{2hqV}}$ (b) $\lambda = \frac{qV}{\sqrt{2mh}}$ (c) $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mqV}}$ (d) $\lambda = \frac{m}{h\sqrt{2qV}}$ (e) ninguna de las anteriores

   (b) Si la partícula es un protón, y $V = 1$ Volt, calcular λ.

   (c) Repetir el cálculo, pero ahora $V = 10^8$ Volt.

4. **Longitud de onda térmica**
   Átomos de ^{85}Rb están termalizados a una temperatura T_c tal que su longitud de onda de De Broglie es mayor que el espaciamiento medio de los átomos. En estas condiciones se forma un *"condensado de Bose"* (un nuevo estado de la materia). La densidad del condensado es $\rho = 10^{12}$ átomos/cm^3. Se puede estimar que

(a) $T_c > 1$ °K (b) $T_c > 10^5$ °K (c) $T_c \approx 100$ n°K
(d) $T_c \approx 1$ m°K (e) $T_c \approx 300$ °K (f) ninguna de las anteriores

5. **Repaso de ondas**

   (a) Dada la ecuación de onda:
   $$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2},$$
      i. Encontrar una solución $E(x,t)$
      ii. Dado un x determinado, dibujar la solución en función de t. Si se obtiene una función periódica, determinar el período.
      iii. Dado un t determinado, dibujar la solución en función de x. Si se obtiene una función periódica, determinar la longitud de onda.
      iv. Dibujar la solución sobre un plano (x,t). ¿Calcular la velocidad con que avanza la onda.

   (b) Se construye una función sumando dos ondas armónicas
   $$\Psi(x,t) = \Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t),$$
   donde $\Psi_1(x,t) = Ae^{i(k_1 x - \omega_1 t)}$ y $\Psi_2(x,t) = Ae^{i(k_2 x - \omega_2 t)}$.
      i. Encontrar la nueva función, en forma de una onda armónica, multiplicada por una amplitud variable.
      ii. Suponer que $k_1 \approx k_2$ y $\omega_1 \approx \omega_2$. Simplificar aún mas la expresión obtenida.
      iii. Dibujar $\Psi(x,t)$ en las distintas formas vistas en el ejercicio anterior.
      iv. Determinar a qué velocidad se desplaza la onda obtenida.

   (c) Construir un paquete de ondas con tres ondas armónicas. Aumentar sucesivamente el número de ondas, y explorar los resultados.