

Finalizando la guía 1 con el problema 20

FÍSICA 4 (2C2026 - CÁTEDRA GIRIBET)

Horacio García Crespo
(horaciogarciacr@gmail.com)

El ejercicio 20 de la guía 1 se presenta como una pared de texto que opaca un ejercicio bastante divertido. Se trata de un método experimental (llamado *método de Rüchardt*) para medir el coeficiente adiabático γ de un gas ideal. Si quieren chusmear más sobre el experimento pueden entrar a [Fuente 1](#) y [Fuente 2](#) (si, hay una referencia en Wikipedia, grow up). El setup es el que ven en la Figura 1:

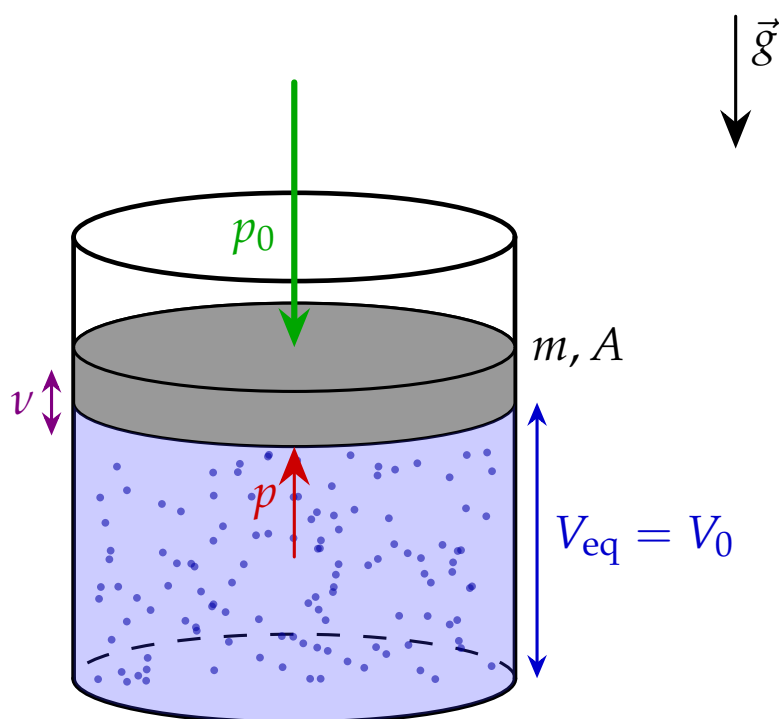


Figura 1: Esquema del problema 20

Básicamente, tenemos un cilindro que tiene encerrado un **gas ideal** (al que queremos medirle el γ) y que posee un pistón que puede moverse a gusto, de masa m (oh no) y area A . Tenemos por supuesto la presión atmosférica p_0 y sabemos, gracias a la pared de texto, que el gas ocupa un volumen V_0 en el equilibrio. El método experimental es el siguiente: se pone a oscilar al pistón **alrededor del equilibrio** con una frecuencia ν de tal forma que, get this, las oscilaciones sean lo *suficientemente lentas* para que el sistema esté siempre en equilibrio y que sean lo *suficientemente rápidas* como para que sean **adiabáticas**. Parece un quilombo, pero vamos de a poco.

Arranquemos como en cualquier good old ejercicio (de Física... 1?), planteando la ecuación de movimiento del sistema. A priori, la coordenada relevante es el desplazamiento del pistón respecto del piso del cilindro, que llamamos x . Tomamos el eje $\hat{x}$ hacia arriba, como ven en el esquema 1.

Las fuerzas que actúan sobre el pistón son:

- La fuerza ejercida por la presión atmosférica, que va como $-p_0 A$ (presión $\times$ área = fuerza),
- La gravedad, que va como $-mg$,
- La fuerza ejercida por la presión del gas pA

Planteamos Newton, y nos queda:

$$m\ddot{x} = -p_0 A - mg + pA \quad (1)$$

Ahora tenemos un problema, hay dos variables: el desplazamiento x y la presión p , que también es una variable dinámica. La idea es quedarnos con una, y para eso vamos a usar el volumen del gas V . En primer lugar, podemos relacionar x con V :

$$x = \frac{V}{A} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{\ddot{V}}{A} \quad (2)$$

que sale de calcular el volumen ocupado por el gas, que tiene una forma cilíndrica. Por otro lado, podemos usar que los procesos son adiabáticos para aplicar la relación:

$$pV^\gamma = \text{cte} = p_{\text{eq}} V_{\text{eq}}^\gamma = p_{\text{eq}} V_0^\gamma \quad (3)$$

En la última igualdad usamos el dato de que el volumen en el equilibrio es V_0 . La pregunta ahora es, ¿Cuál es la presión del gas en el equilibrio? Uno está tentado en decir p_0 , pero no! Recordemos el minúsculo detalle de que tenemos gravedad en el problema, por lo cual también tenemos que tener en cuenta ese aporte. En la ecuación (1) tomamos $\ddot{x} = 0$, y despejando llegamos a que $p_{\text{eq}} = p_0 + \frac{mg}{A}$. Reemplazando esto último en (3), y despejando la presión llegamos a:

$$p = \left(p_0 + \frac{mg}{A} \right) \frac{V_0^\gamma}{V^\gamma} \quad (4)$$

Finally, tomando esto último y la relación (2), y metiendo ambas expresiones en la ecuación de movimiento (1) llegamos a:

$$m \frac{\ddot{V}}{A} = -p_0 A - mg + \left(p_0 A + mg \right) \frac{V_0^\gamma}{V^\gamma} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \ddot{V} = \alpha \left(\frac{V_0^\gamma}{V^\gamma} - 1 \right) \quad (6)$$

donde definimos $\alpha \equiv (p_0 A^2 + mgA)/m$. Ahora, queremos usar que el pistón oscila alrededor del equilibrio, para lo cual vamos a plantear **pequeñas oscilaciones** haciendo el cambio de variable:

$$V = \delta V + V_0 \Rightarrow \ddot{V} = \delta \ddot{V} \quad (7)$$

donde δV es un apartamiento respecto al volumen de equilibrio V_0 . ¿Por qué consideramos pequeñas oscilaciones? Porque estamos pensando que el sistema **siempre** está en equilibrio, y por ende tenemos que pedir que la amplitud de las oscilaciones no difiera mucho de la posición de equilibrio. Metiendo (7) en (6), obtenemos:

$$\delta \ddot{V} = \alpha \left(\frac{V_0^\gamma}{(\delta V + V_0)^\gamma} - 1 \right) \quad (8)$$

Haciendo un buen Taylor de $1/(\delta V + V_0)^\gamma$ alrededor de $\delta V = 0$:

$$(\delta V + V_0)^{-\gamma} = \frac{1}{V_0^\gamma} - \frac{\gamma}{V_0^{\gamma+1}} \delta V + O(\delta V^2) \quad (9)$$

$$\approx \frac{1}{V_0^\gamma} - \frac{\gamma}{V_0^{\gamma+1}} \delta V \quad (10)$$

Nos quedamos hasta primer orden, como es lo usual. Metiendo la aproximación en (8):

$$\delta \ddot{V} = \alpha \left(V_0^\gamma \left[\frac{1}{V_0^\gamma} - \frac{\gamma}{V_0^{\gamma+1}} \delta V \right] - 1 \right) = -\frac{\alpha \gamma}{V_0} \delta V = -\omega^2 \delta V \quad (11)$$

Oh sorpresa, llegamos al oscilador armónico, y hacemos la identificación:

$$\omega^2 = \frac{\alpha \gamma}{V_0} \quad (12)$$

Usando la definición de α y que $\omega^2 = 4\pi^2 \nu^2$, llegamos a nuestro objetivo:

$$4\pi^2 \nu^2 = \frac{(p_0 A^2 + m g A) \gamma}{m V_0} \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{m V_0 4\pi^2 \nu^2}{p_0 A^2 + m g A}} \quad (13)$$

Conociendo todos los valores de estas cantidades al hacer el experimento, podemos calcular el γ .

