

# Práctica 7

## *Principio de incertidumbre, operadores y ecuación de Schrödinger*

Segundo cuatrimestre de 2026

---

*«At first, I was deeply alarmed. I had the feeling that, through the surface of atomic phenomena, I was looking at a strangely beautiful interior, and felt almost giddy at the thought that I now had to probe this wealth of mathematical structures nature had so generously spread out before me. I was far too excited to sleep, and so, as a new day dawned, I made for the southern tip of the island, where I had been longing to climb a rock jutting out into the sea. I now did so without too much trouble, and waited for the sun to rise.»*

— Werner Heisenberg, hablando de su experiencia en su viaje a la isla de Heligoland y el amanecer de la mecánica cuántica.



Foto: casi todos los protagonistas de esta segunda parte de la materia en la conferencia de Solvay de 1927 (a todo color).

---

1. Utilizar el principio de incertidumbre para estimar el orden de magnitud del diámetro de un átomo. Comparar el resultado con el radio de Bohr de la primera órbita del átomo de hidrógeno.

*Ayuda:* suponer que el electrón está confinado en una región de longitud  $\delta x$ . Esto implica que tiene una energía cinética no nula; además, hay una energía potencial del orden de magnitud de  $-e^2/\delta x$ . Hallar  $\delta x$  de manera tal que la energía total sea un mínimo y evaluar la expresión para ésta.

2. Mostrar que si uno define:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$$

es decir, si se usa la desviación estándar, el principio de incerteza de Heisenberg se escribe como:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Verifique su resultado en los siguientes casos (discutir cuidadosamente el ítem (c): ¿Qué ocurre en ese caso con los valores medios? ¿Se puede escribir directamente la relación de incerteza?)

- a)  $\psi(x) = A \exp(-a^2 x^2)$
- b)  $\psi(x) = \begin{cases} A \exp(ax), & x \leq 0 \\ A \exp(-ax), & x \geq 0 \end{cases}$
- c)  $\psi(x) = \begin{cases} A \exp\left(\frac{ip_0 x}{\hbar}\right), & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

*Ayuda:* Considerar primero la integral:

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x\psi(x) + \lambda \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right|^2 dx \quad (1)$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Notar que  $I(\lambda) \geq 0, \forall \lambda$ . La idea es desarrollar el integrando, usar la definición de valores medios y del operador momento  $\hat{p}$ , y el hecho que  $I(\lambda)$  será una cuadrática no negativa en  $\lambda$ . En esta primera instancia, se puede asumir que  $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$ . Para obtener el resultado general, se repite el procedimiento con la función:

$$\tilde{\psi}(x) = \exp\left(\frac{-i\langle p \rangle x}{\hbar}\right) \psi(x + \langle x \rangle)$$

3. Demostrar que si un operador  $\hat{F}$  es **hermítico**, el valor medio de la magnitud física  $F$  es real.

#### Definición de operador hermítico

Decimos que un operador es hermítico si

$$\langle \phi | (\hat{F} | \psi \rangle) = \int_{\Omega} \phi^* (\hat{F} \psi) dx = \int_{\Omega} (\hat{F} \phi)^* \psi dx = (\langle \phi | \hat{F} | \psi \rangle)$$

para todo par de funciones  $\phi(x)$  y  $\psi(x)$  definidas sobre un dominio  $\Omega$ , y que pertenecen al dominio de  $\hat{F}$ .

4. Hallar la expresión del operador  $\hat{p}_x$  en la representación de coordenadas y la del operador  $\hat{x}$  en la representación de los momentos. Demostrar que ambos son hermíticos.

5. Determinar cuáles de las siguientes funciones son **autofunciones** del operador  $\hat{p}_x$  y del operador  $\hat{p}_x^2$ :

- a)  $\psi(x) = A \sin(kx)$
- b)  $\psi(x) = A \cos(kx) + iA \sin(kx)$
- c)  $\psi(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx)$
- d)  $\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$
- e)  $\psi(x) = A \exp[ik(x - a)], a \in \mathbb{R}$
- f)  $\psi(x) = A \exp(ikx) + iA \exp(-ikx)$
- g)  $\psi(x) = A \exp(ax^2), a \in \mathbb{R}$
- h)  $\psi(x) = A \exp(ax), a \in \mathbb{R}$

6. Demostrar que las combinaciones lineales  $\hat{A} \pm i\hat{B}$  de los operadores  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  no son hermíticas aunque los operadores si lo sean.

7. Determinar para qué potenciales  $V(x)$  las siguientes funciones son autofunciones del operador energía (also known as el operador **hamiltoniano**):

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x)$$

- a)  $\psi(x) = A \exp(ax) + B \exp(-ax)$
- b)  $\psi(x) = A \exp(ikx) + iB \exp(-ikx)$
- c)  $\psi(x) = A \exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right), a > 0$

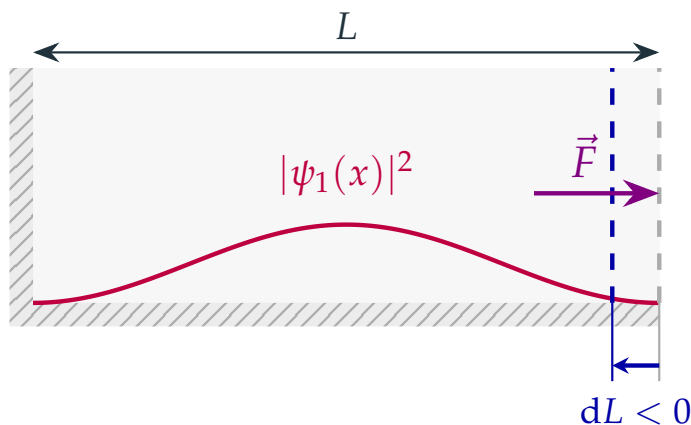
8. Sea una partícula en una dimensión cuya función de onda es:

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{a^2 + x^2}} \exp\left(\frac{ip_0x}{\hbar}\right)$$

donde  $a, p_0$  y  $A$  son constantes.

- a) Determinar  $A$  para que la densidad de probabilidad esté normalizada.
- b) Si se mide la posición de la partícula ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado esté comprendido entre  $-a/\sqrt{3}$  y  $a/\sqrt{3}$ ?
- c) Calcular el valor medio del operador  $\hat{p}_x$ .

9. Si se quiere comprimir una caja dentro de la cual se encuentra una partícula, se necesita cierta energía. Esto sugiere que la partícula ejerce una fuerza sobre las paredes. Con esta hipótesis en mente, y considerando que cuando la longitud de la caja cambia en  $dL$ , la energía cambia por medio de la expresión  $dE = -FdL$ , calcular la expresión de la fuerza  $F$ . ¿A qué distancia se obtiene  $F = 1 \text{ N}$  cuando un electrón se encuentra en el estado con número cuántico  $n = 1$ ? (ver figura).



10. Se tiene una partícula confinada entre dos paredes colocadas en  $x = 0$  y  $x = a$  (véase problema 7 de la guía 6). Para el autoestado de energía con número cuántico  $n$ :

- a) Mostrar que el valor medio de la posición  $\langle x \rangle$  es:

$$\langle x \rangle = \frac{a}{2}$$

donde  $a$  es el ancho de la caja. Evaluar la desviación estándar de la posición  $\Delta x$  en este caso. ¿Cuál es su significado físico?

- b) Realizar los mismos cálculos para el momento lineal  $p$ .  
c) Evaluar el producto  $\Delta x \Delta p$  y ver que satisface la relación de Heisenberg ¿Depende de  $n$ ?

11. Sea la siguiente función de onda que representa una partícula libre moviéndose en una dimensión:

$$\psi(x, 0) = A \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2a^2}\right) \exp\left(\frac{ip_0x}{\hbar}\right)$$

Hallar:

- a) La distribución de probabilidades en  $x$  y el valor de la constante  $A$ .  
b)  $\langle x \rangle$ ,  $\langle p_x \rangle$  y las dispersiones correspondientes.  
c) La función de distribución del impulso  $\tilde{\psi}(p)$  y la distribución de probabilidades en  $p$   
d) El valor medio de la energía cinética.  
e)  $\psi(x, t)$  y la distribución de probabilidades para  $x$  y  $p$  en el instante  $t$ .

f)  $\Delta x$  y  $\Delta p$  en el instante  $t$ , y el movimiento del centro del paquete.

12. Sea la siguiente función de onda:

$$\psi(x, t) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(k - k_0)^2}{k_0^2}\right) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

donde  $k_0$  es una constante positiva y  $A = 1/\sqrt{k_0}$ . Calcular el valor medio del impulso lineal  $p_x$  y su dispersión.

### Conmutadores y sus propiedades

Se define el conmutador entre dos operadores lineales  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  como:

$$[\hat{A}, \hat{B}] \phi \equiv \hat{A}(\hat{B}\phi) - \hat{B}(\hat{A}\phi)$$

donde  $\phi$  es una función arbitraria. Algunas de las propiedades de los conmutadores son las siguientes:

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B}] &= -[\hat{B}, \hat{A}] \\ [\hat{A}, \hat{A}] &= 0 \\ [\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] &= [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}] \\ [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] &= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \end{aligned}$$

13. Calcular los siguientes conmutadores:

- a)  $[\hat{x}, \hat{p}_x]$
- b)  $[\hat{x}, \hat{p}_x^2]$
- c)  $[\hat{x}^{-1}, \hat{p}_x]$
- d) Entre las distintas componentes del momento angular. Por ejemplo:

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = [\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x, \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y]$$

Usando que:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \hat{V}(x)$$

- e)  $[\hat{x}, \hat{H}]$
- f)  $[\hat{p}_x, \hat{H}]$

14. Demostrar que si dos operadores hermíticos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  satisfacen que  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$  (es decir  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  **conmutan**) entonces existe una base de autofunciones  $\phi$  común a ambos operadores (es decir  $\hat{A}\phi = \alpha\phi$  y  $\hat{B}\phi = \beta\phi$ )

15. Si  $\psi(x)$  es una función normalizable y continua, esta puede desarrollarse en una **base ortonormal de autofunciones**  $\phi(x)$  de un operador hermítico  $\hat{A}$  de la siguiente manera:

$$\psi(x) = \sum_i c_i \phi_i(x)$$

con  $\hat{A}\phi_i(x) = a_i\phi_i(x)$ . Consideramos el caso en el que  $\hat{A}$  tiene un espectro discreto.

- Obtener una expresión para los coeficientes  $c_i$ .
- Calcular el valor medio de  $A$ . Interpretar físicamente la cantidad  $|c_i|^2$ .

16. El operador  $\exp(\hat{A})$  posee significado si se lo desarrolla en serie de potencias:

$$\exp(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{A}^n$$

Mostrar que si  $\phi$  es un autoestado de  $\hat{A}$  con autovalor  $a$ , entonces es también autoestado de  $\exp(\hat{A})$ . Determinar el autovalor.

17. Sea  $\hat{H}$  el hamiltoniano de un sistema físico y  $\phi_n(x)$  sus autoestados de autoenergía  $E_n$ . Para un operador arbitrario  $\hat{A}$  probar que  $\langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle_n = 0$ , donde el subíndice  $n$  indica que el valor medio se toma sobre el estado  $\phi_n(x)$ .

18. a) A partir de la ecuación de Schrödinger, y teniendo en cuenta que  $\hat{H}$  es hermítico, demostrar que:

$$\frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle$$

- b) Con el resultado del punto anterior hallar  $\langle \dot{x} \rangle$  y  $\langle \dot{p} \rangle$  (también conocido como **teorema de Ehrenfest**). Interpretar físicamente el resultado.

19. Dada la función de onda:

$$\psi(x) = \begin{cases} A(1 + ax) \exp(ax), & \text{si } x \leq 0 \\ A(1 - ax) \exp(-ax), & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

donde  $a \in \mathbb{R}_{>0}$ .

- Normalizar esta función de onda.
- Hallar la energía total  $E$  y la potencial  $V(x)$  suponiendo que  $V(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ .
- Calcular los valores medios de  $x$ ,  $p$  y la dispersión correspondiente a cada uno.

20. Escribir la ecuación de Schrödinger para:

- a) La partícula libre.
- b) Una partícula bajo la influencia de una fuerza uniforme y constante.
- c) El átomo de Hidrógeno
- d) El átomo de Helio
- e) El **oscilador armónico**.

21. Mostrar que la ecuación de Schrödinger es separable cuando el potencial de interacción  $V(t)$  depende solamente del tiempo y es uniforme en el espacio. Resolver las ecuaciones resultantes cuando  $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$  ¿Es estacionaria la función de estado resultante?

22. El operador paridad  $\Pi$  se define mediante la relación:

$$\Pi\psi(x) = \psi(-x)$$

- a) Mostrar que las autofunciones de  $\Pi$  son simétricas o antisimétricas, con autovalores 1 ó  $-1$ , respectivamente.
- b) Demostrar que si  $\hat{A}(\hat{x}) = \hat{A}(-\hat{x})$ , entonces  $\hat{A}(\hat{x})$  conmuta con  $\Pi$  ¿Qué se puede decir de la paridad de las autofunciones de  $\hat{A}$ ?