Guía 4: Teoría Cinética

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríban a Claudio Archubi, archubi@iafe.uba.ar o a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 10: Sea un gas de N partículas con carga q y masa m entre dos cilindros coaxiales de radios a y b y longitud L ($L \gg b$, a). El cilindro interno está cargado de forma tal que las partículas tienen una energía potencial $V(r) = C\ln(r/a)$. Suponga que, en el equilibrio, todas las partículas están suficientemente lejos entre sí. En estas condiciones, hallar:

1. La función de distribución.
2. La densidad de partículas a una distancia r del eje.

Solución:
Lo importante para estos problemas es saber cómo se escribe la energía y en que intervalo de valores est acotada la distribución por las condiciones de contorno.

En el caso de partículas cargadas tenemos un término adicional al de la energía cinética. Es el término de la energía potencial eléctrica:

$$E_x = \sum_{i,j/j>i}^{n} \frac{q}{\epsilon|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \tag{1}$$

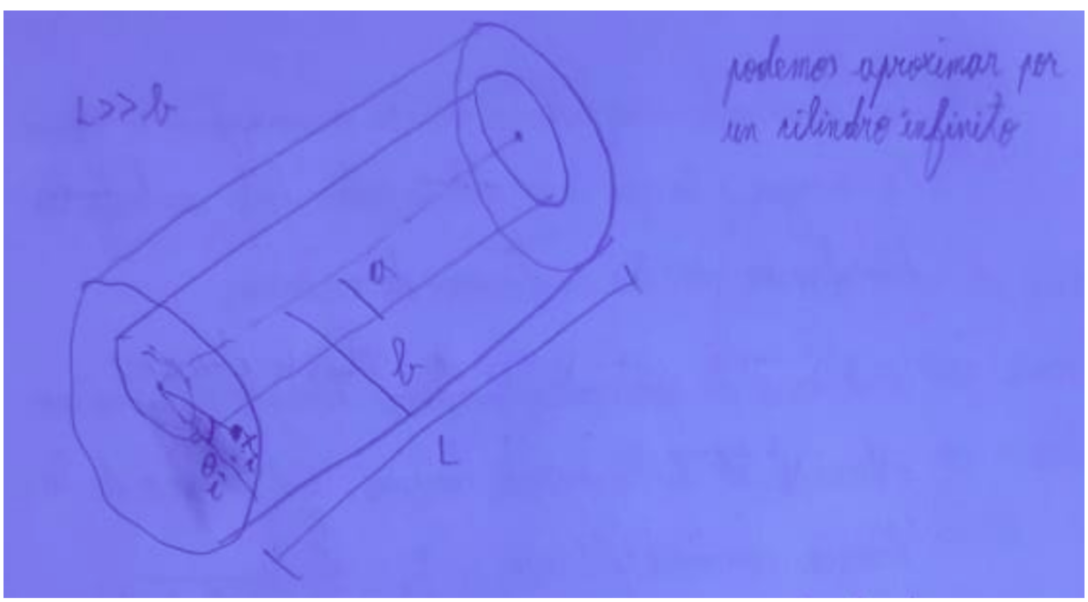
$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m v_i^2 + \sum_{i,j/j>i}^{N} \frac{q}{\epsilon|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \tag{2}$$

La función de distribución será:

$$f(\vec{v}_1, ...\vec{v}_N, \vec{x}_1, ..., \vec{x}_N) = Ce^{-\beta E(\vec{v}_1,...\vec{v}_N,\vec{x}_1,...,\vec{x}_N)} \tag{3}$$

donde $c = \dfrac{1}{\int ... \int e^{-\beta E(v_1,...v_N,x_1,...,x_N)} dv_1...dv_N d^3x_1...d^3x_N}$

El problema no está acotado en el espacio de velocidades pero si en el espacio de posiciones. Para saber los límites de la integral en ese espacio es conveniente elegir coordenadas cilíndricas.



En coordenadas cilíndricas $d^3x_i = r_i \mathrm{sen}\theta_\mathrm{i} \mathrm{dr_i dz_i d}\theta_\mathrm{i}$ con $a < r_i < b$; $\quad 0 < \theta_i < 2\pi$; $\quad -\infty < z_i < \infty$

$$|\vec{x}_i - \vec{x}_j| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2} = \sqrt{(r_1\cos\theta_1 - r_2\cos\theta_2)^2 + (r_1\mathrm{sen}\theta_2 - \mathrm{r_2 sen}\theta_1)^2 + (\mathrm{z_1 - z_2})^2} \tag{4}$$

Esto sería muy feo para resolver pero tenemos una suposición adicional: las partículas están tan alejadas entre sí que la energía potencial de interacción se anula: $E_x \to 0$ pues $|\vec{x}_i - \vec{x}_j| \to \infty$

Sin embargo el cilindro a su vez está conectado a una fuente que produce una diferencia de potencial que no es debida a la energía de interacción entre partículas. Esto agrega un término adicional a la energía de cada partícula de la forma:

$$v(r) = c\ln\left(\frac{r}{a}\right) \tag{5}$$

Por lo tanto

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}mv_i^2 + c\sum_{i=1}^N \ln\left(\frac{r_i}{a}\right) \tag{6}$$

$$f(\vec{v}_1 ... \vec{v}_N r_1 ... r_N) = ce^{-\beta\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2}mv_i^2 + c\sum_{i=1}^N \ln\left(\frac{r_i}{a}\right)\right)} \tag{7}$$

con $$C = \frac{1}{\underbrace{\int\cdots\int e^{-\beta\sum_{i=1}^N \frac{1}{2}mv_i^2} d^3v_1\cdots d^3v_N}_{=\left(\sqrt{\frac{\beta}{2m\pi}}\right)^{3N}} \cdot \underbrace{\int\cdots\int e^{-\beta c\sum_{i=1}^N \ln\frac{r_i}{a}} r_1 dr_1\cdots dr_N}_{=?}}$$

$$\int_a^b\cdots\int_a^b e^{-\beta c\sum_{i=1}^N \ln\frac{r_i}{a}} r_i dr_1\cdots dr_N = \prod_{i=1}^N \int_a^b e^{-\beta c\ln\frac{r_i}{a}} r_i dr_i =$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \int_a^b e^{-\ln\left(\frac{r_i}{a}\right)^{\beta c}} \cdot r_i \, dr_i = \prod_{i=1}^{N} a \int_a^b \left(\frac{r_i}{a}\right)^{\beta c+1} dr_i =$$

$$= a^{2N} \prod_{i=1}^{N} \int_1^{\frac{b}{a}} x^{\beta c+1} dx = a^{2N} \left[\frac{x^{\beta c+2}}{\beta c+2} \Bigg|_1^{\frac{b}{a}} \right]^N =$$

$$= \frac{a^{2N}}{(\beta c+2)^N} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{(\beta c+2)} - 1 \right]^N$$

$$\therefore \; c = c_1 \cdot c_2 \quad \text{con} \quad c_1 = \left(\frac{\beta}{2m\pi}\right)^{\frac{3N}{2}}$$

$$c_2 = \frac{1}{\frac{a^{2N}}{(\beta c+2)^N} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{(\beta c+2)} - 1 \right]^N}$$

$$f(\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_N, r_1 \ldots r_N) = f_v(\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_N) \, f_r(r_1 \ldots r_N)$$

$$\text{con} \begin{cases} f_v(\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_N) = \left(\frac{\beta}{2m\pi}\right)^{\frac{3N}{2}} e^{-\frac{\beta m}{2} \sum_{i=1}^{N} v_i^2} \quad \text{con} \quad v_i^2 = v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{z_i}^2 \\ f_r(r_1 \ldots r_N) = \frac{(\beta c+2)^N}{a^{2N}} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{(\beta c+2)} - 1 \right]^{-N} \cdot e^{-\beta c \sum_{i=1}^{N} \ln \frac{r_i}{a}} \cdot r_i \end{cases}$$

Notemos que tanto f_v como f_r pueden escribirse como:

$$f_v(\vec{v}_1 ... \vec{v}_N) = [f_v(\vec{v}_1]^N \tag{8}$$

$$f_r(r_1 ... r_N) = [f_r(r_1]^N \tag{9}$$

donde $f_v(\vec{v}_1)$ es la distribución de Maxwell de velocidades para una partícula:

$$f_v(\vec{v}_1) = \left(\frac{\beta}{2m\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{1}{2}\beta m v_1^2} \tag{10}$$

y

$$f_r(r_1) = \frac{(\beta c + 2)}{a^2} \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\beta c + 2} - 1\right) r_i e^{-\beta c \ln(r_i/a)} \tag{11}$$

Para calcular la densidad media para una distancia r del eje podemos usar la función de distribución $f_r(r_1)$

$$\rho(r) = Prob(r)\frac{N}{V} = f_r(r_1)\frac{N}{V} \tag{12}$$

es la probabilidad de hallar una partícula a distancia r