

GUÍA 4 - TEORÍA CINÉTICA

1

PROBABILIDADES EN SISTEMAS DISCRETOS:

• TENEMOS UN EXPERIMENTO QUE NOS DA UN RESULTADO x_i POR CADA REALIZACIÓN ' i ' ($i = 1, 2, \dots, N$) QUE PERTENECE A CIERTO ESPACIO MUESTRAL DISCRETO Ω :

• $x_i \in \Omega$, $\Omega = \{A, B, C, \dots\}$ $i = 1, 2, \dots, N$
↑
VARIABLE
ALEATORIA
posibles resultados
 $N = \text{NÚMERO TOTAL DE MEDICIONES.}$

• CON CADA REALIZACIÓN, NOTAREMOS QUE CADA RESULTADO DENTRO DE Ω TIENE CIERTA FRECUENCIA:

• $n_k = \text{NÚMERO DE VECES QUE SALIÓ EL RESULTADO 'K'}$ (FRECUENCIA ABSOLUTA)

• $\frac{n_k}{N} = \text{NÚMERO DE VECES QUE SALIÓ EL RESULTADO 'K' DIVIDIDO N}$ (FRECUENCIA RELATIVA).

$$\boxed{\Gamma_k = n_k / N}, \Gamma_k \in [0, 1]$$

• Ejemplo: TENEMOS UN SET DE MEDICIONES $\{x_i\}$ CUYAS REALIZACIONES TOMARON LOS RESULTADOS:

$x_1 = A$	$x_4 = A$	$\parallel$	$\Gamma_A = \frac{n_A}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Gamma_A = 0,5$	$+$	
$x_2 = A$	$x_5 = C$		$\Gamma_B = \frac{n_B}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \Gamma_B = 0,3$		$+$
$x_3 = B$	$x_6 = B$		$\Gamma_C = \frac{n_C}{N} = \frac{1}{6} \Rightarrow \Gamma_C = 0,1\bar{6}$		$+$
				$\underline{\hspace{2cm}}$	$= 1 \checkmark$

• SI HAGO UN GRAN NÚMERO DE MEDICIONES ($N \rightarrow \infty$) ENTONCES PODRÉ ESTIMAR LA PROBABILIDAD DE SACAR CADA RESULTADO:

$$\boxed{P(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Gamma_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_k}{N}}$$

PROBABILIDAD DEL RESULTADO 'K'.

• PROPS:

1) LAS PROBABILIDADES ESTÁN NORMALIZADOS: $P(\Omega) = P(A) + P(B) + \dots = 1$

2) LAS PROBABILIDADES DE CUALQUIER RESULTADO: $P(k) \geq 0$.
'k' ES SIEMPRE NO NEGATIVA.

3) SI QUEREMOS LA PROBABILIDAD DE UN INTERVALO DE SUCESOS DISCRETOS: $P(x_i \in \{A, B, \dots, k\}) = P(A) + P(B) + \dots + P(k)$

• A VECES, PUEDE INTERESARNOS EL PROMEDIO DE NUESTROS RESULTADOS.
A ESTA MAGNITUD LA LLAMAREMOS $\langle x \rangle$ DEL CONJUNTO $\{x_i\}$:

$$\langle x \rangle \equiv \frac{n_A \cdot A + n_B \cdot B + n_C \cdot C + \dots}{N} = \frac{n_A}{N} \cdot A + \frac{n_B}{N} \cdot B + \frac{n_C}{N} \cdot C + \dots$$

$$= \Gamma_A \cdot A + \Gamma_B \cdot B + \Gamma_C \cdot C + \dots \xrightarrow{N \rightarrow \infty} P(A) \cdot A + P(B) \cdot B + P(C) \cdot C + \dots$$

$$\boxed{\langle x \rangle = \sum_{k \in \Omega} k P(k)}$$

VALOR MEDIO, PROMEDIO ó
MEDIA DE UN SET DE REALIZA-
CIONES.

O INCLUSIVE, PUEDE INTERESARNOS ALGUNA DE SUS POTENCIAS, O CUALQUIER FUNCIÓN DE LOS RESULTADOS:

$$\boxed{\langle x^n \rangle = \sum_{k \in \Omega} k^n P(k)}$$

$$\boxed{\langle g(x) \rangle = \sum_{k \in \Omega} g(k) P(k)}$$

EL VALOR MEDIO $\langle \cdot \rangle$ DE UNA MAGNITUD CUMPLE LINEALIDAD:

$$\underline{\langle ax + by \rangle = a \langle x \rangle + b \langle y \rangle} \quad \begin{matrix} a, b \in \mathbb{R} \\ x, y \in \Omega \end{matrix}$$

• OTRA MAGNITUD DE RELEVANCIA ES TAMBIÉN LA DISPERSIÓN DE UN SET DE RESULTADOS $\{x_i\}$. PARA ELLO, ESTUDIAREMOS LA CANTIDAD:

$$\begin{aligned}\text{Var}(x) &\equiv \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle (x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2) \rangle \\ &= \langle x^2 \rangle - 2\overbrace{\langle x \rangle \langle x \rangle}^{\langle x \rangle^2} + \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Var}(x) \equiv \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad \text{VARIANZA CUADRÁTICA MEDIA}$$

CON ESTO, DEFINIMOS LA DISPERSIÓN Δx DE LOS RESULTADOS COMO:

$$\boxed{\Delta x \equiv \sqrt{\text{Var}(x)} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}} \quad \text{DISPERSIÓN}$$

• Ejemplo: PROMEDIO ACADÉMICO BASADO EN LAS NOTAS DE LOS FINALES.

• $x_1 = 10$	• $x_6 = 9$		$\langle x \rangle = 10 \cdot \frac{2}{10} + 9 \cdot \frac{4}{10} + 8 \cdot \frac{3}{10} + 6 \cdot \frac{1}{10} = 8,6$
• $x_2 = 9$	• $x_7 = 9$		
• $x_3 = 10$	• $x_8 = 9$		
• $x_4 = 8$	• $x_9 = 8$		
• $x_5 = 6$	• $x_{10} = 8$		

$$\langle x^2 \rangle = 10^2 \cdot \frac{2}{10} + 9^2 \cdot \frac{4}{10} + 8^2 \cdot \frac{3}{10} + 6^2 \cdot \frac{1}{10} = 75,2$$

$$\text{Var}(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 75,2 - 73,96 = 1,24$$

$$\Delta x = \sqrt{\text{Var}(x)} \approx 1,1$$

$$x = \overbrace{8,6}^{\langle x \rangle} \pm \overbrace{1,1}^{\Delta x}$$

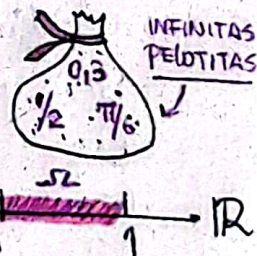
↳ $\approx 60-70\%$ DE MIS RESULTADOS.

• PROBABILIDADES EN SISTEMAS CONTINUOS:

• TENEMOS UN EXPERIMENTO QUE NOS DA UN RESULTADO x , POR CADA REALIZACIÓN i ($i = 1, 2, \dots, N$) QUE PERTENECE A CIERTO ESPACIO MUESTRAL CONTINUO Ω :

• Ejemplo: UNA BOLSA LLENA DE PELOTITAS DONDE CADA UNA CORRESPONDE A UN NÚMERO DE LA RECTA REAL ENTRE 0 y 1.

- 1) ¿QUÉ PROBABILIDAD HAY DE SACAR UN NÚMERO MAYOR A $1/2$? Rta: 0,5.
- 2) ¿QUÉ PROBABILIDAD HAY DE SACAR UN NÚMERO ENTRE $3/4$ y 1? Rta: 0,25.
- 3) ¿QUÉ PROBABILIDAD HAY DE SACAR EL NÚMERO $1/3$? Rta: 0.



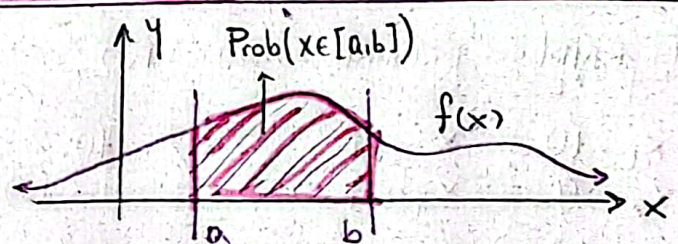
• TIENE SENTIDO ASIGNAR PROBABILIDADES A INTERVALOS Y NO A ELEMENTOS INDIVIDUALES. LA FORMA DE HACERLO ES CON LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD O LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN:

Def: DADA UNA VARIABLE ALEATORIA 'x' cuyo ESPACIO MUESTRAL ES CONTINUO (EN PARTICULAR, LA RECTA REAL), EXISTIRÁ UNA FUNCIÓN $f(x)$ TAL QUE LA PROBABILIDAD DE ENCONTRAR A 'x' EN EL INTERVALO $[a, b]$ ES:

$$\text{Prob}(x \in [a, b]) = \int_a^b f(x) dx$$

• $f(x)$ = FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

GRÁFICAMENTE REPRESENTA LA PROBABILIDAD COMO EL ÁREA BAJO LA CURVA.



• PROPS:

1) LAS PROBABILIDADES ESTÁN NORMALIZADAS:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

2) LA PROBABILIDAD DE CUALQUIER INTERVALO DE RESULTADOS ES SIEMPRE NO NEGATIVA:

$$f(x) \geq 0$$

• EN FÍSICA, PODEMOS HACER UNA INTERPRETACIÓN SOBRE $f(x)$ CUANDO QUEREMOS DESCRIBIR UN SISTEMA DE N PARTÍCULAS:

Def: LA PROBABILIDAD DE QUE UN CERTO NÚMERO DE PARTÍCULAS dN_x TENGA LA MAGNITUD 'x' COMPRENDIDA ENTRE $(x, x+dx)$ ES:

$$\frac{dN_x}{N} = f(x) dx$$

• EN GENERAL, NOSOTROS LES DAREMOS LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD $f(x)$ QUE DESCRIBE AL FENÓMENO FÍSICO, Y LES PEDIREMOS QUE REDUCEN LOS CÁLCULOS A PARTIR DE ELLA.

SI QUEREMOS HALLAR VALORES MEDIOS DE CANTIDADES, DEBEMOS BASARNOS DEL CASO DISCRETO DONDE LO HACÍAMOS CON LA SUMATORIA A LA INTEGRAL CON LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD:

(3)

DISCRETO:

CONTINUO:

$$1) \langle X \rangle = \sum_{k \in \mathbb{R}} k P(k) \longrightarrow \langle X \rangle = \int_{\text{dom } f} x f(x) dx$$

$$2) \langle X^n \rangle = \sum_{k \in \mathbb{R}} k^n P(k) \xrightarrow{\Sigma \rightarrow \int} \langle X^n \rangle = \int_{\text{dom } f} x^n f(x) dx$$

$$3) \langle g(x) \rangle = \sum_{k \in \mathbb{R}} g(k) P(k) \longrightarrow \langle g(x) \rangle = \int_{\text{dom } f} g(x) f(x) dx$$

• PARA EL CÁLCULO DE LA VARIANZA Y LA DISPERSIÓN, SE SIGUE RESPECTANDO SU FORMA:

$$\bullet \text{Var}(x) \equiv \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \int_{\text{dom } f} (x - \langle x \rangle)^2 f(x) dx$$

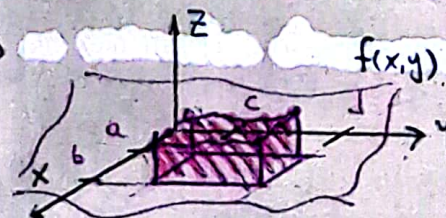
$$= \dots = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \Delta x = \sqrt{\text{Var}(x)}$$

• SIN EMBARGO, NO SIEMPRE PASA QUE LOS SUCESOS FÍSICOS DEPENDEN DE UNA ÚNICA VARIABLE ALEATORIA 'x'. POR ELLO DEFINIMOS:

Def: DADAS DOS VARIABLES ALEATORIAS 'x', 'y' cuyos espacios muestrales SON CONTINUOS (EN PARTICULAR, LA RECTA REAL), EXISTIRÁ UNA FUNCIÓN $f(x,y)$ TAL QUE LA PROBABILIDAD DE ENCONTRAR A 'x' EN EL INTERVALO $[a,b]$ Y A 'y' EN EL INTERVALO $[c,d]$ ES:

$$\text{Prob}(x \in [a,b] \wedge y \in [c,d]) = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x,y)$$

ESTA MISMA IDEA PUEDE EXTRAPOLARSE A MAYOR CANTIDAD DE VARIABLES ALEATORIAS. GRÁFICAMENTE REPRESENTA LA PROBABILIDAD COMO EL VOLUMEN BAJO LA SÁBANA.



• Props:

1) Las probabilidades están normalizadas:

$$\iint_{\text{dom} f} f(x,y) dx dy = 1$$

2) La probabilidad de cualquier intervalo conjunto de resultados es siempre no negativo:

$$f(x,y) \geq 0$$

- Análogamente como hicimos para una variable aleatoria, podemos interpretar a $f(x,y)$ relacionándola con un sistema de N partículas:

Def: La probabilidad de que cierto número de partículas $d^2 N_{xy}$ tenga su magnitud 'x' comprendida entre $(x, x+dx)$ y su magnitud 'y' comprendida entre $(y, y+dy)$ es:

$$\frac{d^2 N_{xy}}{N} \equiv f(x,y) dx dy$$

- Si yo quisiera, en particular, analizar una de las variables aleatorias ignorando el resultado de los otros, entonces obtenemos:

$$g(x) \equiv \int_{\text{dom}(y)} dy f(x,y)$$

DISTRIBUCIÓN MARGINAL DE LA VARIABLE 'x'.

$$h(y) \equiv \int_{\text{dom}(x)} dx f(x,y)$$

DISTRIBUCIÓN MARGINAL DE LA VARIABLE 'y'.

$f(x,y) \equiv$ DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD CONJUNTA DE x,y .

- Si las variables (x,y) son independientes entre sí (es decir, uno no tiene influencia sobre la otra) entonces se tiene que:

$$f(x,y) = g(x) \cdot h(y) \quad \text{si } x, y \text{ independientes}$$

TEORÍA CINÉTICA:

(4)

• TRABAJAREMOS, EN GENERAL, CON DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD PARA LAS VELOCIDADES DE LAS PARTÍCULAS DEL SISTEMA.

• Ejemplo: ANALICEMOS LA DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES ESCALARES (EN MÓDULO: $v \in [0, +\infty)$) SIGUIENTE:

$$\frac{dN_v}{N} = \underbrace{A \cdot v \cdot e^{-v/V}}_{=f(v)} dv, \quad A \equiv \text{CONSTANTE DE NORMALIZACIÓN.}$$

1) NORMALIZAR:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{+\infty} f(v) dv = \int_0^{+\infty} A \cdot v \cdot e^{-v/V} dv \stackrel{\text{partes}}{=} A \cdot \left[\underbrace{-v \cdot e^{-v/V}}_{=0} \cdot V \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} V \cdot e^{-v/V} dv \\ &= -AV^2 \cdot e^{-v/V} \Big|_0^{+\infty} = A \cdot V^2 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{V^2}} \end{aligned}$$

2) VELOCIDAD MEDIA ($\langle v \rangle$)

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \int_0^{+\infty} v f(v) dv = \frac{1}{V^2} \cdot \int_0^{+\infty} v^2 \cdot e^{-v/V} dv \\ &\stackrel{\text{partes}}{=} \frac{1}{V^2} \left[\underbrace{-v^2 \cdot e^{-v/V}}_{=0} \cdot V \right]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} V \cdot v \cdot e^{-v/V} dv \\ &= \frac{2}{V} \underbrace{\int_0^{+\infty} v^2 \cdot e^{-v/V} dv}_{=1/A} = \frac{2}{V} \cdot V^2 \Rightarrow \boxed{\langle v \rangle = 2V} \end{aligned}$$

3) DISPERSIÓN DE LA VELOCIDAD (Δv)

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \int_0^{+\infty} v^2 f(v) dv = \frac{1}{V^2} \int_0^{+\infty} v^3 \cdot e^{-v/V} dv \\ &\stackrel{\text{partes}}{=} \frac{1}{V^2} \left[\underbrace{-v^3 \cdot e^{-v/V}}_{=0} \cdot V \right]_0^{+\infty} + 3 \int_0^{+\infty} V \cdot v^2 \cdot e^{-v/V} dv \\ &= \frac{3}{V} \underbrace{\int_0^{+\infty} v^2 \cdot e^{-v/V} dv}_{=\langle v \rangle / A} = \frac{3}{V} \cdot 2V \cdot V^2 \Rightarrow \boxed{\langle v^2 \rangle = 6V^2} \end{aligned}$$

$$\bullet \text{Var}(N) = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = 6V^2 - (2V)^2 = 2V^2$$

$$\bullet \Delta N = \sqrt{\text{Var}(N)} \Rightarrow \boxed{\Delta N = \sqrt{2} V} \approx 1,41 \cdot V$$

4) VELOCIDAD CUADRÁTICA MEDIA (N_{rms}):

$$N_{rms} \equiv \sqrt{\langle N^2 \rangle} \Rightarrow \boxed{N_{rms} = \sqrt{6} V} \approx 2,45 \cdot V$$

5) VELOCIDAD MÁS PROBABLE (N_p):

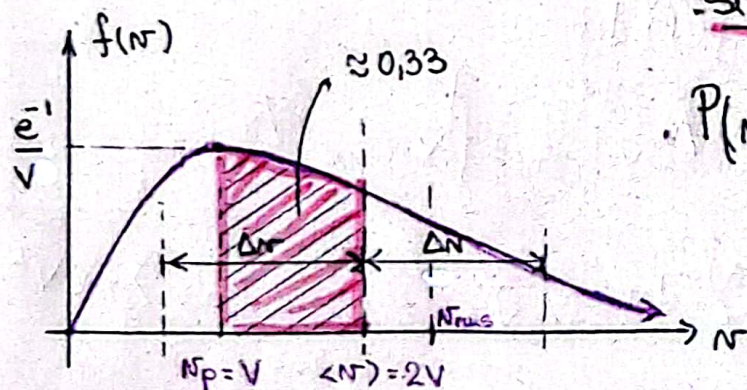
$$\left. \frac{\partial f}{\partial N} \right|_{N_p} = 0 \Rightarrow \frac{1}{V^2} \cdot e^{-N/V} \cdot \left(1 - \frac{N_p}{V} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{N_p = V}$$

(y sea máximo)

6) PROBABILIDAD DE QUE UNA PARTÍCULA TENGA VELOCIDAD ENTRE LA MEDIA Y LA MÁS PROBABLE:

$$\begin{aligned} \text{Prob}(N \in [\overset{=V}{N_p}, \overset{=2V}{\langle N \rangle}]) &= \int_V^{2V} f(N) dN = \frac{1}{V^2} \int_V^{2V} N e^{-N/V} dN \\ &\stackrel{\text{partes}}{=} \frac{1}{V^2} \left[-V N e^{-N/V} \Big|_V^{2V} + \int_V^{2V} V e^{-N/V} dN \right] \\ &= \frac{1}{V^2} \cdot \left[V^2 (e^{-1} - 2e^{-2} - e^{-2} + e^{-1}) \right] = 2e^{-1} - 3e^{-2} \approx \underline{0,33} \end{aligned}$$

7) GRAFICAR:



Si realizamos el cálculo:

$$P(N \in [N - \Delta N, N + \Delta N]) = \int_{N-\Delta N}^{N+\Delta N} f(N) dN$$

$\approx 0,74 \checkmark$