

Cap 11 - Sears

Teoría Cinética de Gases Ideales

Hipótesis: gas ideal

un volumen finito de un gas está compuesto por un gran número de moléculas

Número de Avogadro $N_A = 6,03 \cdot 10^{26}$ moléculas en un kg-mol

$$V_{\text{kg-mol}} = 22,4 \text{ m}^3$$

$$1 \text{ m}^3 \sim 3 \cdot 10^{25} \text{ moléculas en CNPT}$$

gas diluido

$$d \sim 2 \cdot 10^{-10} \text{ m} \leq d \leq 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Las interacciones entre moléculas son colisiones elásticas

En ausencia de fuerzas externas se mueven en línea recta y están distribuidos uniformemente.

La densidad es $n = \frac{N}{V}$ número de partículas en un volumen V

$$\Rightarrow dN = n dV$$

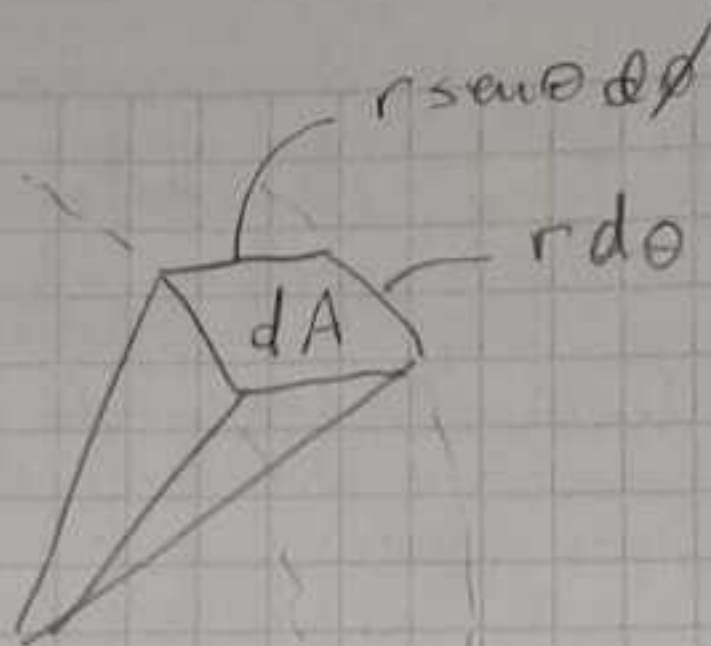
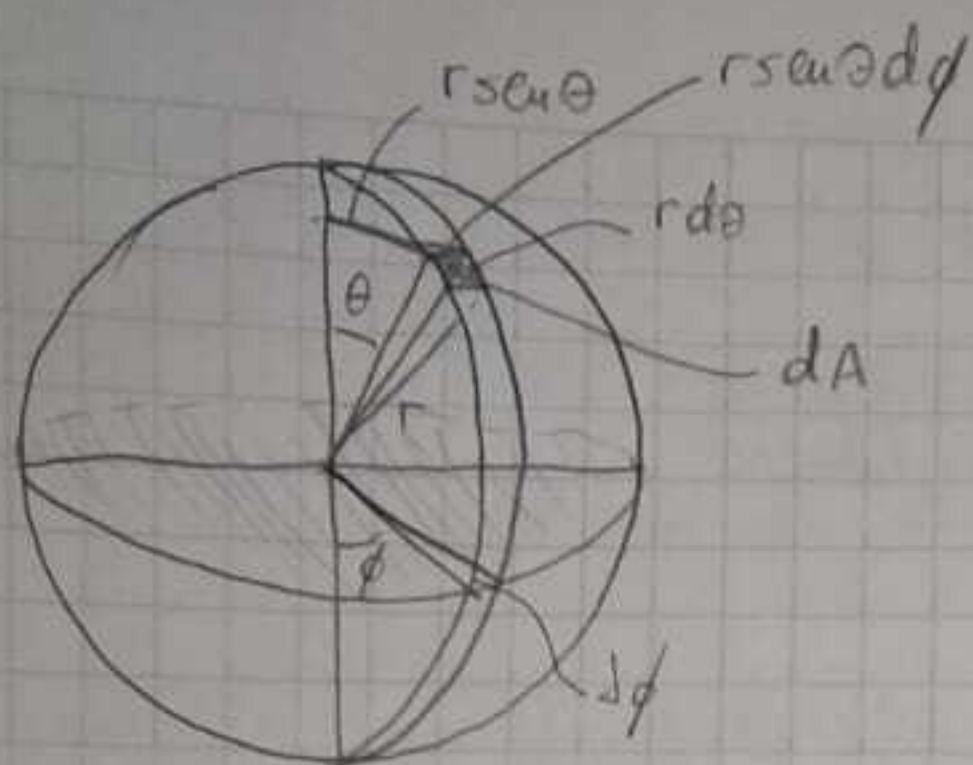
siempre que el camino libre medio en dicho volumen sea al menos un orden de magnitud más grande que el diámetro de las moléculas

Todas las direcciones de propagación son igualmente probables

En ese sentido considero el número de partículas por unidad de área en una esfera.

$$\frac{N}{4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow dN = \frac{N}{4\pi r^2} dA$$



$$\Rightarrow dA = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

Entonces el número de puntos en este área queda

$$\frac{N}{4\pi r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{N}{4\pi} \sin \theta d\theta d\phi$$

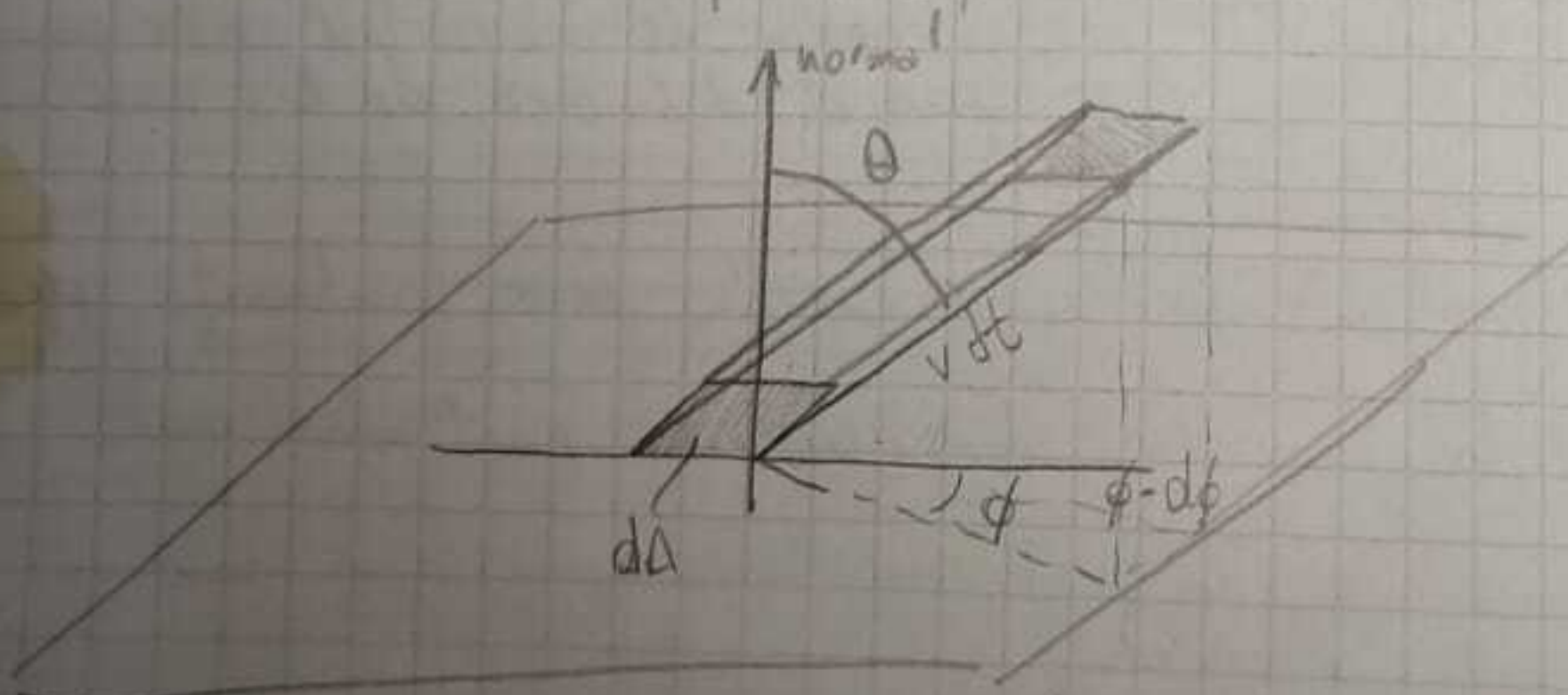
Si lo dividimos por el volumen queda

$$\frac{n}{4\pi} \sin \theta d\theta d\phi$$

queda así el número de
moléculas por unidad de
volumen con velocidades
cuya dirección está en
entre θ y $\theta + d\theta$ y
 ϕ y $\phi + d\phi$

En principio tomaremos $0 < v < +\infty$

Colisiones con las paredes



Las partículas con v y dv en este caja (cilindro) son:

$$dN_v = \frac{1}{4\pi} n v \sin \theta d\theta d\phi$$

y el volumen del cilindro es:

$$dV = dA \cdot v dt \cos \theta$$

El número de colisiones es:

$$dN_v = dV$$

$$dA dt \frac{v dn_v}{4\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi$$

entonces, el número de choques por unidad de área y unidad de tiempo queda:

$$\frac{1}{4\pi} v dn_v \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi$$

El número total se obtiene integrando por unidad de área y tiempo.

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi} v dn_v \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi = \frac{1}{4} v dn_v$$

Si queremos saber para todas las velocidades...

$$\frac{1}{4} \int_0^{\infty} v dn_v \quad (1)$$

$$\bar{v} = \frac{\sum n_i v_i}{n} = \frac{\int v dn_v}{n} \Rightarrow \int v dn_v = n \bar{v} \quad (2)$$

Iguando (1) y (2)

$$\boxed{\frac{1}{4} n \bar{v}}$$

son todas las partículas con todas las velocidades por unidad de área y de tiempo

Ejemplo: $n = 3 \cdot 10^{25} \frac{\text{molecules}}{\text{m}^3}$ } para O_2 a $T = 273K$
 $\bar{v} = 450 \text{ m/s}$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 10^{25} \frac{\text{molecules}}{\text{m}^3} \cdot 450 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3,3 \cdot 10^{27} \frac{\text{colisiones}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$$

Si queremos reducir la cuenta por ángulo sólido

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin\theta d\theta d\phi$$

Las moléculas que colisionan por unidad de área y tiempo son:

$$\frac{1}{4\pi} v dv \cos\theta d\Omega \Rightarrow \frac{1}{4\pi} v dv \cos\theta$$

y el número de partículas con todas las velocidades queda:

$$\boxed{\frac{1}{4\pi} n \bar{v} \cos\theta}$$

Ecuación de Estado:

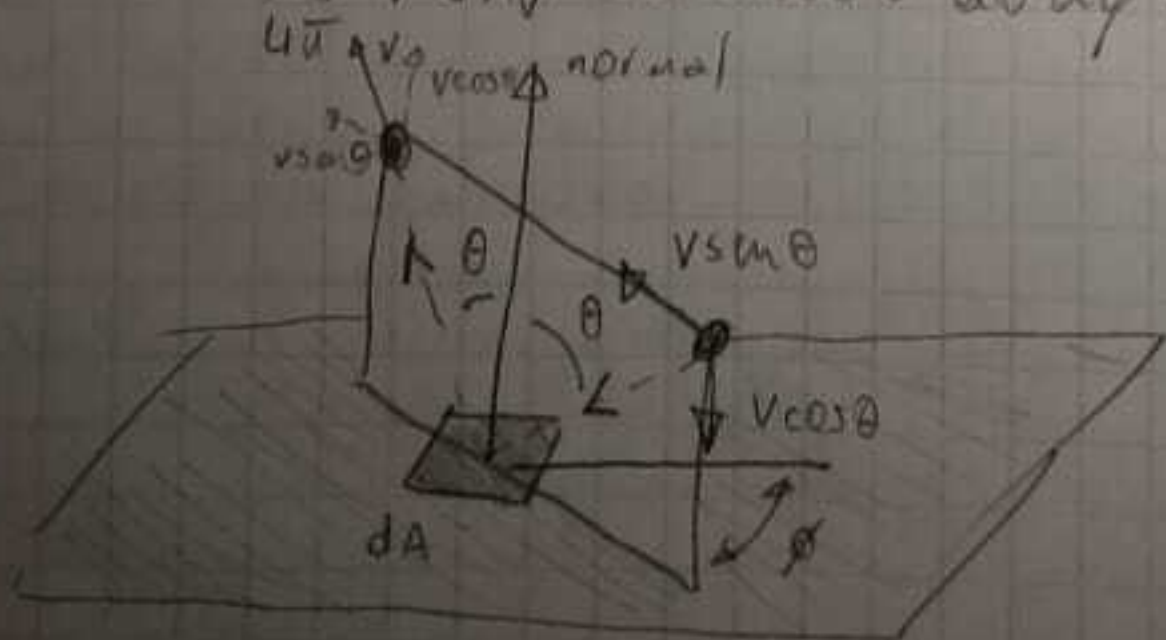
Si choca una molécula contra la pared, la variación de cantidad de movimiento es:



$$mv \cos\theta - (-mv \cos\theta) = 2mv \cos\theta$$

De vuelta el número de colisiones en un área dA y tiempo dt

$$\frac{1}{4\pi} v dv \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi dA dt$$



Entonces el cambio de la cantidad de movimiento queda:

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 2mv \cos\theta \left(\frac{1}{4\pi} v dv \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi dA dt \right) =$$

$$= \frac{1}{3} m v^2 dv dA dt$$

El momento resultante queda:

$$\bar{dF} \cdot dt = \frac{1}{3} m \left[\int_0^{\infty} v^2 dv \right] dA dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{p} = \frac{1}{3} m \int_0^{\infty} v^2 dv} \quad \text{la presión ejercida sobre la pared}$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\int_0^{\infty} v^2 dv}{n}$$

$$\Rightarrow \langle p \rangle = \frac{1}{3} m n \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} m \frac{N}{V} \langle v^2 \rangle$$

$$\Rightarrow pV = \frac{1}{3} m N \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} N \langle E \rangle$$

ahora sea el número de moles

$$n = \frac{N}{N_0} \quad N_0 \text{ -- número de Avogadro}$$

$$pV = nRT = N \frac{R}{N_0} T = NKT$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{\text{mol} \cdot K}$$

constante de Boltzmann

$\Rightarrow$

$$NKT = \frac{1}{3} m N \langle v^2 \rangle$$

$$\boxed{\langle v^2 \rangle = \frac{3KT}{m}}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{3}{2} KT}$$

Acá sale el problema 2a