Guía 3: Potenciales termodinámicos

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

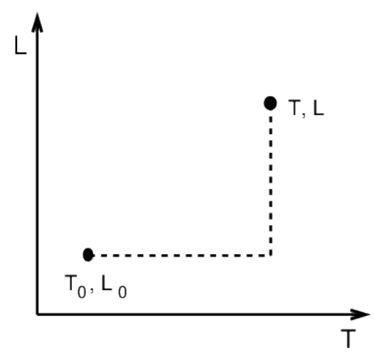
<u>Problema 10:</u> En un intervalo de temperaturas cercanas a T, la fuerza tensora en una varilla plástica estirada está relacionada con su longitud por la expresión:

$$ff(T, L) = aT^2(L - L_0)$$

con a, L_0 ctes > 0, $L_0 \equiv$longitud sin estirar.
Para $L = L_0$, la capacidad calorífica c_L de la varilla es:

$$c_L(T, L_0) = bT \;\; (L = L_0;\, b = cte)$$

1. Escriba la expresión diferencial del primer principio y, a partir de ella, halle dS tomando como variables independientes U y L.
2. Halle $\left.\frac{\partial S}{\partial L}\right|_T$ (use la relación de Maxwell que se deriva de la función de Helmholtz, en función de T y L)
3. Conociendo $S(T_0, L_0)$, determine $S(T, L)$ a cualquier otra T y L. Para ello, tenga en cuenta el siguiente gráfico:



4. Calcule la capacidad calorífica a $L = cte$, $c_L(T, L)$, cuando la longitud de la varilla es L, en vez de L_0.
5. Si se parte de $T = T_0$ y $L = L_0$ y se ejerce tracción sobre la varilla aislada adiabáticamente, en forma reversible, hasta que se alcanza L_f, ¿cuál será la temperatura final T_f?

<u>Solución:</u>
1- Arrancamos con el primer principio de la termodinámica

$$\delta Q = dU + \delta W \tag{1}$$

como $\delta Q = TdS$

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{ff}{T}dL \tag{2}$$

$$dS = \frac{dU}{T} - aT(L - L_0)dL \tag{3}$$

2- Vamos de vuelta

$$dF = -\delta W - SdT = aT^2(L - L_0)dL - SdT \tag{4}$$

Trabajamos esta expresión para obtener la derivada de la entropía:

$$\left(\frac{\partial ff}{\partial L}\right)_T = aT^2(L-L_0) \qquad\qquad \left(\frac{\partial ff}{\partial T}\right)_L = -S \tag{5}$$

Usamos el hecho que es un diferencial exacto:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial L} = \frac{\partial^2 F}{\partial L \partial T} \tag{6}$$

Igualamos y ya está:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = -2aT(L-L_0) \tag{7}$$

3- Vamos a obtener la entropía en términos de la transformación de la figura:

$$dS = \frac{dU}{T} - aT(L-L_0)dL = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial L}\right)_T dL + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_L dT - aT(L-L_0)dL \tag{8}$$

Reacomodamos un poco:

$$dS = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_L dT + \left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial L}\right)_T - aT(L-L_0)\right] dL \tag{9}$$

Para calcular la variación de entropía tenemos dos tramos, el tramo 1 a L constante y luego el tramo 2 a T constante:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 \tag{10}$$

Para el tramo 1:

$$\Delta S_1 = b(T - T_0) \tag{11}$$

Para el tramo 2:

$$\Delta S_2 = -\frac{1}{2}aT(L-L_0)^2 \tag{12}$$

Bueno, falta sumar.

4- Calculemos el calor específico:

$$c_L = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_L = \left(\frac{dU}{dT}\right)_L \tag{13}$$

Del item anterior tenemos dS y lo metemos en la expresión para dU

$$dU = [b - (L-L_0)^2]TdT - aT^2(L-L_0)dL \tag{14}$$

y lo metemos en 13

$$c_L = [b - (L-L_0)]T \tag{15}$$

5- Usamos el hecho que es un proceso adiabático reversible: $\Delta S = 0$

$$T_f = \frac{bT_0}{b - a(L_f - L_0)^2} \tag{16}$$