Repaso

Función de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann es:

$$N(v) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

$N(v)\,dv$: # ~~de~~ moléculas con velocidades $\in (v, v+dv)$

Notar la normalización:

$$\int_0^\infty N(v)\,dv = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^2 e^{-mv^2/2kT}\,dv$$

$$= \cancel{4\pi} N \left(\frac{m}{\cancel{2\pi}kT}\right)^{\cancel{3/2}} \frac{1}{\cancel{4}} \sqrt{\frac{\cancel{\pi}}{\left(\frac{m}{2kT}\right)^3}}$$

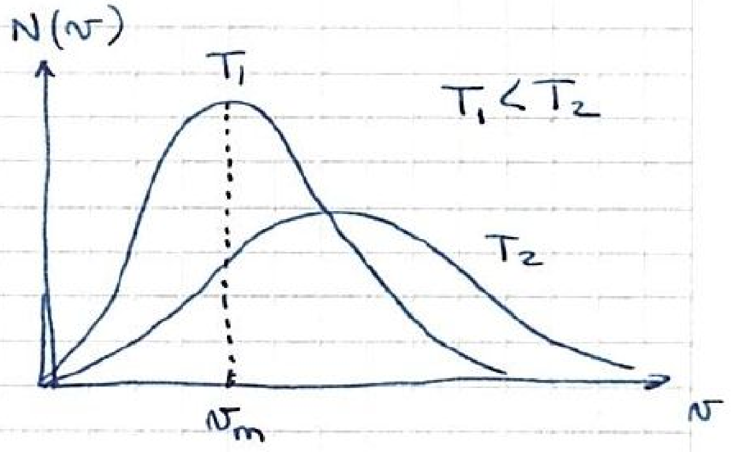
$$= N$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

Ver Tabla 12-1 del SS

Repaso

Velocidad más probable



v_m : máximo de la distribución.

$\rightarrow \dfrac{d\,N(v)}{dv} = 0$

$\rightarrow v_m = \sqrt{\dfrac{2kT}{m}}$

$\Rightarrow N(v) = \dfrac{4\,N}{\sqrt{\pi}\,v_m^3}\, v^2\, e^{-v^2/v_m^2}$

Velocidad media:

Recordar: $\Phi = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \int_0^\infty v \, N(v) \, dv$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{v^3}{v_m^3} e^{-v^2/v_m^2} \, dv$$

$$x = \frac{v}{v_m} \qquad dx = \frac{dv}{v_m} \rightarrow dv = v_m \, dx$$

$$\langle v \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} v_m \underbrace{\int_0^\infty e^{-x^2} x^3 \, dx}_{1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_m = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{kT}{m}}$$

Tabla 12-1 $f(n) = \int_0^\infty x^n e^{-ax^2}\, dx.$

n	$f(n)$	n	$f(n)$
0	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$	1	$\frac{1}{2a}$
2	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$	3	$\frac{1}{2a^2}$
4	$\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$	5	$\frac{1}{a^3}$
6	$\frac{15}{16}\sqrt{\frac{\pi}{a^7}}$	7	$\frac{3}{a^4}$

Recordar $\begin{cases} P = \dfrac{1}{3} n m \langle v^2 \rangle \\[2ex] \dfrac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \langle E_c \rangle = \dfrac{3}{2} k_B T \end{cases}$

Velocidad cuadrática media

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \left[\frac{1}{N} \int_0^N v^2 \, N(v) \, dv \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \, v_m = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Función de distribución de velocidades vectoriales de MB

$$\left.\begin{array}{l}\text{Volumen de "corteza" : } 4\pi v^2\, dv \\ \\ N(v)\, dv \text{ da el \# de partículas en la corteza}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{N(v)\, dv}{4\pi v^2\, dv} = \frac{N(v)}{4\pi v^2} = \rho(v)$$

da el número de part. por unidad de volumen en espacio de velocidades.

$$N = \int d^3v \; \rho(v) =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \; \text{sen}\,\theta \int_0^{\infty} v^2 \rho(v)\, dv$$

$$= \int_0^{\infty} 4\pi v^2 \rho(v)\, dv = \int_0^{\infty} N(v)\, dv$$

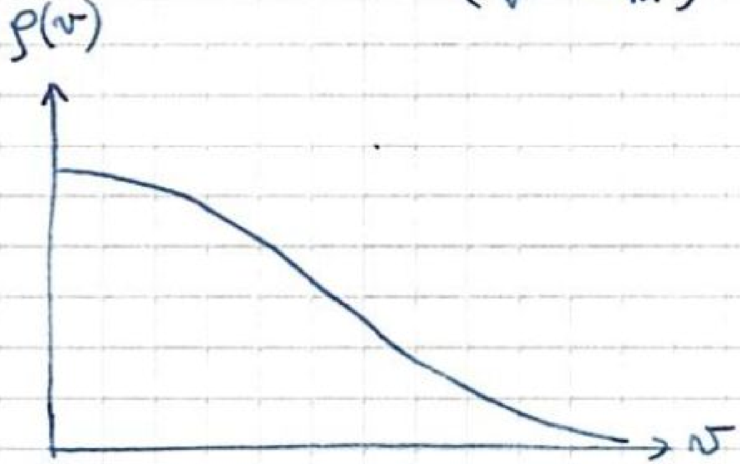
$$N = \int d^3v \; \rho(v) =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \; \text{sen}\,\theta \int_0^{\infty} v^2 \rho(v) \, dv$$

$$= \int_0^{\infty} 4\pi v^2 \rho(v) \, dv = \int_0^{\infty} N(v) \, dv$$

Entonces $\rho(v) = \dfrac{N(v)}{4\pi v^2} = N\left(\dfrac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}mv^2/kT}$

$$= N \frac{1}{(\sqrt{\pi}\, v_m)^3} e^{-\frac{1}{2}mv^2/kT}$$

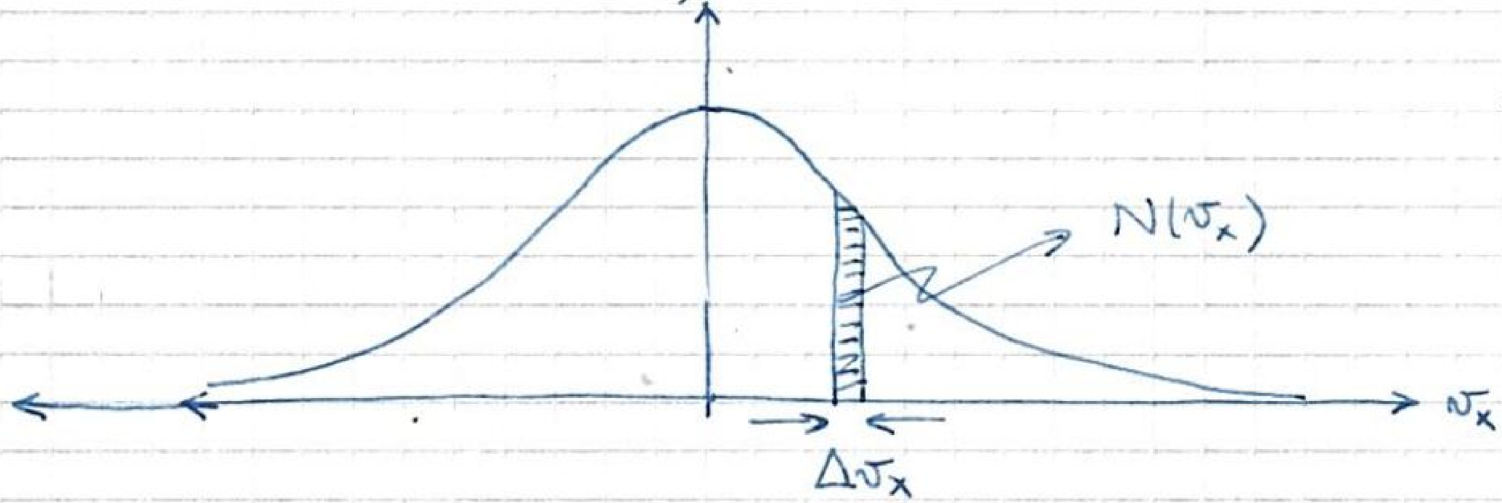


$$\Delta N_{v_x v_y v_z} = \rho(v)\, \Delta v_x\, \Delta v_y\, \Delta v_z$$

$$= \frac{N}{(\sqrt{\pi}\, v_m)^3}\, e^{-\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/kT}\, \Delta v_x\, \Delta v_y\, \Delta v_z$$

Integrando sobre v_y y v_z se obtiene la distribución de velocidades para la componente v_x :

$$\frac{\Delta N_{v_x}}{\Delta v_x} = N \frac{1}{\sqrt{\pi}\, v_m} e^{-v_x^2/v_m^2} = \rho(v_x)$$



Principio de equipartición de la energía

grados de libertad de las moléculas del sistema →

- coordenadas necesarias para describir el estado de un cuerpo: $\{\vec{R}_{CM}, \theta, \phi\}$ cuerpo rígido.
  $\{\vec{r}_i\}$ SISTEMA DE PARTÍCULAS.

→ parámetros de los cuales depende la energía de un cuerpo:

$$\{\underbrace{v_x, v_y, v_z}_{x,\,y,\,z}, \underbrace{\omega_x, \omega_y}_{\text{rotación}}\}$$

Sea z un grado de libertad en el segundo sentido:

$\varepsilon(z)$ es la energía asociada.

La distribución de MB toma la forma general:

$$\frac{\Delta N_z}{\Delta z} = A \, e^{-\varepsilon(z)/kT} \qquad y \quad N = A \int dz \, e^{-\varepsilon(z)/kT}$$

Por ejemplo, si $\quad z = v_x \quad : \begin{cases} \varepsilon(v_x) = \frac{1}{2} m v_x^2 \\ A = \dfrac{N}{\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{2kT}{m}}} \end{cases}$

La energía media asociada al parámetro z es:

$$\langle E(z)\rangle = \frac{1}{N}\int \varepsilon(z)\, dN_z = \frac{A}{N}\int \varepsilon(z)\, e^{-\varepsilon(z)/kT}\, dz$$

Suponiendo que $\varepsilon(z) = a z^2$

$$\boxed{\langle E(z)\rangle} = \frac{\cancel{A}\int a z^2 e^{-az^2/kT}\, dz}{\cancel{A}\int e^{-az^2/kT}\, dz} = \boxed{\frac{1}{2}kT}$$

Esto establece el principio de equipartición de la energía.