Ley de Stefan-Boltzmann

Las cargas eléctricas dentro de los materiales emiten y absorben radiación EM de diferentes frecuencias.

Ley empírica de Stefan (1879):

$$I_T = \sigma\, e\, T^4$$

- T → temperatura
- e → emisividad $0 < e < 1$
- σ → constante de Stefan-Boltzmann

$$\sigma = 0{,}567 \times 10^{-4} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2\, \text{K}^4\, \text{s}}$$

- I_T → $\dfrac{\text{energía emitida}}{\text{área} \times \text{segundo}}$

Deducida luego teóricamente por Boltzmann (1884)

Emisión y absorción de radiación - Ley de Kirchhoff

Sea un cuerpo a temp. T, iluminado por radiación monocromática de longitud de onda λ.

$$\text{Energía incidente} \begin{cases} \nearrow \text{se refleja} & : r(\lambda,T) \\ \rightarrow \text{se transmite} & : t(\lambda,T) \\ \searrow \text{se absorbe} & : a(\lambda,T) \end{cases}$$

con $a(\lambda,T) + r(\lambda,T) + t(\lambda,T) = 1$

Absortividad espectral : $a(\lambda, T)$

$$a(\lambda, T) = \frac{\text{Energía abs. por unidad de } t\text{, área, } \lambda}{\text{Energía incidente por unidad de } t\text{, área, } \lambda}$$

$$a(\lambda, T) \begin{cases} \rightarrow 1 & : \text{absorbe todo} \\ \rightarrow 0 & : \text{no absorbe nada} \end{cases}$$

Emisividad espectral : $e(\lambda, T)$

Definimos primero la emitancia espectral :

$I_T(\lambda)$ = Potencia emitida por unidad de área y λ

Usando argumentos termodinámicos Kirchhoff muestra que el cociente de ambas es universal :

$$f(\lambda, T) = \frac{I_T(\lambda)}{a(\lambda, T)}$$

Kirchhoff introduce el concepto de "cuerpo negro" ideal, que absorbe toda la radiación incidente:

$$a(\lambda, T) = 1 \leftarrow \text{cuerpo negro}$$

Entonces, para el cuerpo negro vale que:

$$I_T^{CN}(\lambda) = f(\lambda, T)$$

Para una superficie general queda:

$$I_T(\lambda) = a(\lambda, T)\, I_T^{CN}(\lambda)$$ Ley de Kirchhoff de la radiación (1860)

Definimos la emisividad espectral:

$$e(\lambda, T) = \frac{I_T(\lambda)}{I_T^{CN}(\lambda)}$$

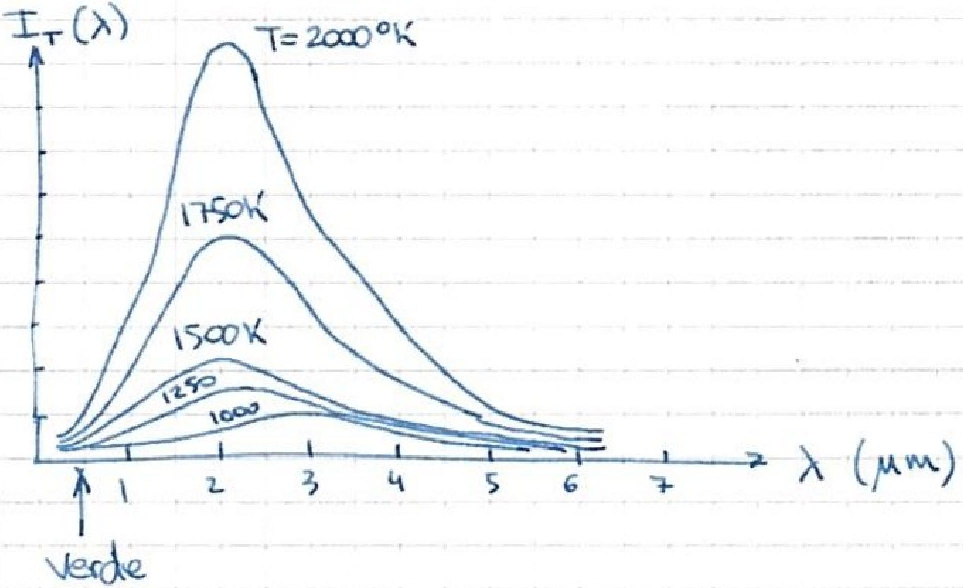
o sea que $e(\lambda, T) = a(\lambda, T)$

Para cuerpo negro $a(\lambda, T) = 1 \Rightarrow e(\lambda, T) = 1$

Distribución espectral de la radiación de CN: $I_T(\lambda)$

→ $I_T(\lambda)\,d\lambda$: energía emitida por segundo por unidad de área con long. de onda entre λ y $\lambda + d\lambda$.

Mediciones: Lummer y Pringsheim (1899)



Notar: $I_T = \int I_T(\lambda)\, d\lambda = \sigma e T^4$ Ley de Stéfan (-Boltzmann)

corrimiento con T: $\lambda_{máx} \propto \frac{1}{T}$

Notar que casi todo el espectro está en el infrarojo.

Una cavidad contiene radiación EM en equilibrio térmico con las paredes a temp. T. Un pequeño agujero se comporta como superficie de cuerpo negro a temperatura T.

Dentro de la cavidad hay energía EM, con una densidad

(3-7) de Tipler

$\rho_T(\lambda)\, d\lambda$

$$\rho_T = \frac{1}{4} c\, I_T(\lambda)$$

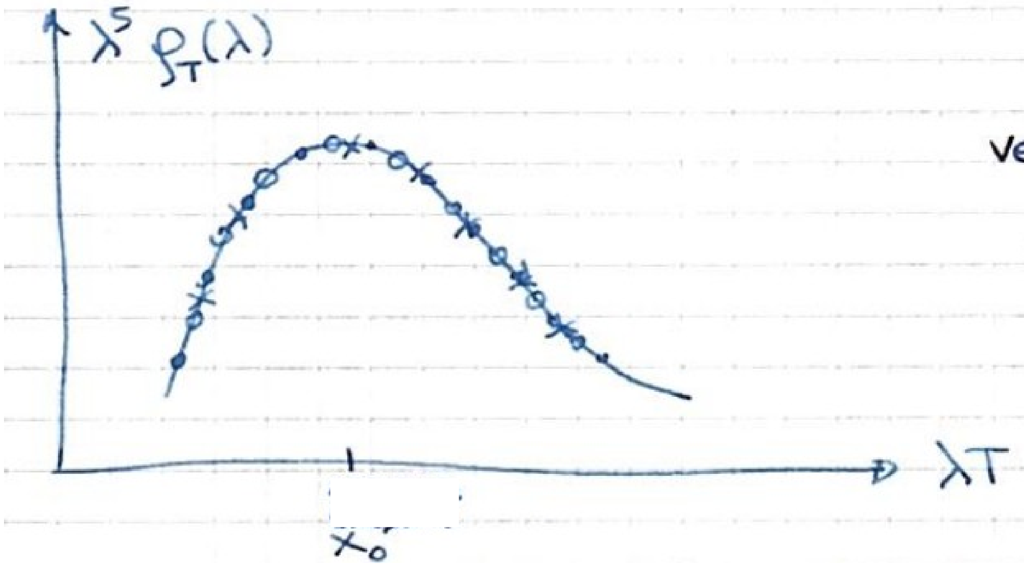
$\hookrightarrow$ densidad de energía térmica

La densidad de energía en cavidad $\propto$ energía radiante emitida por agujero.

Ley de Wien (1893)

Obtuvo teóricamente con argumentos termodinámicos:

$$\rho_T(\lambda) = \frac{f(\lambda T)}{\lambda^5}$$



ver Fig. 2-5 de Eisberg

Las curvas experimentales obtenidas a distintas T "colapsan" sobre una curva única, $f(\lambda T)$ cuando se grafica $\lambda^5 \rho_T(\lambda)$ versus λT.

Máximo de la curva: $\lambda T = x_0$

$$\Rightarrow \lambda_{max} = \frac{x_0}{T} \propto \frac{1}{T}$$

Ley de Rayleigh y Jeans

Calcular la función de distribución de densidad de energía dentro de una cavidad, $\rho_T(\lambda)$.

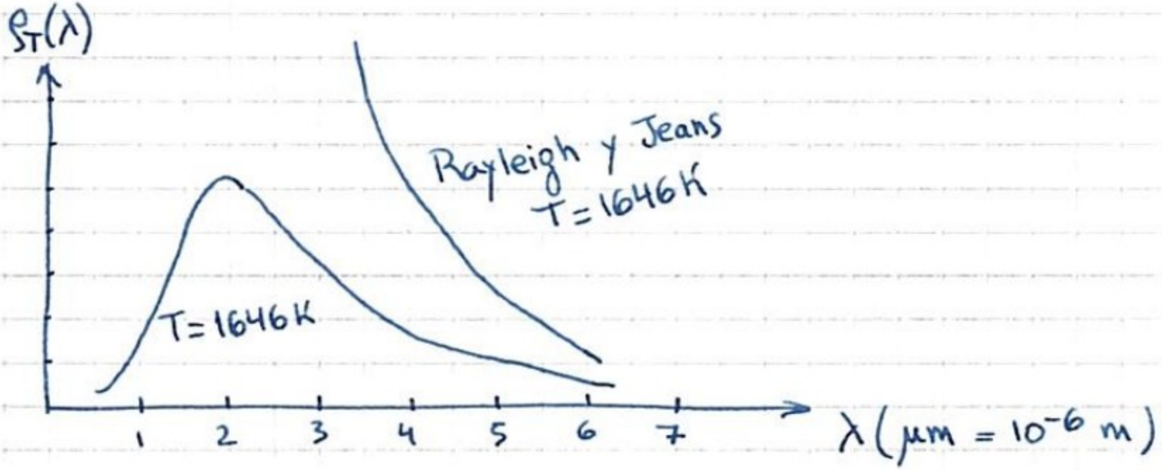
Primero, calcular el número de modos de vibración del campo ~~EM~~ EM dentro de la cavidad. (Como calcular los modos de vibración de una cuerda, pero en 3D)

$$n(\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^4}$$

3-8 de Tipler

Entonces:

$$\rho_T(\lambda) = n(\lambda)\overbrace{kT}^{\langle E\rangle} = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} = \frac{8\pi k}{\lambda^5}\,\lambda T$$



La teoria de RJ falla gravemente para λ chicos:

se lo llamó la catástrofe ultravioleta.

Teoría de Planck (1901)

El cálculo clásico de la energía media por oscilador era

$$\langle E \rangle = \int_0^\infty E \, f(E) \, dE = \int_0^\infty E \, c \, e^{-E/kT} \, dE = kT$$

Planck propuso que las energías de los osciladores (modos EM u osciladores en las paredes de la cavidad) son no continuas, sino que toman un conjunto discreto de valores:

$$E_n = n \, \epsilon = n \, h\nu \qquad , n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

energía básica del modo de oscilación con frecuencia ν

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n f(E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \, C \, e^{-E_n/kT}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n h\nu \, C \, e^{-nh\nu/kT}$$

$$= h\nu \, C \sum_{n=0}^{\infty} n \, e^{-\alpha n} \qquad \alpha = \frac{h\nu}{kT}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \, e^{-\alpha n} = -\frac{d}{d\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n} = -\frac{d}{d\alpha} \frac{1}{(1-e^{-\alpha})}$$

$$= \frac{1}{(1-e^{-\alpha})^2} \frac{d}{d\alpha}(-e^{-\alpha}) = \frac{e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2}$$

Por otro lado $C = 1 - e^{-\alpha}$ (demostrarlo)

$$\langle E \rangle = h\nu \frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} = \frac{h\nu}{e^{\alpha} - 1} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Algo nuevo: el valor medio energético ahora depende de ν, o modo.

En términos de $\lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda}$

$$\langle E \rangle(\lambda) = \frac{hc}{\lambda \left(e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1\right)}$$

Multiplicando por la cantidad de modos: $n(\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^4}$

$$\rho_T(\lambda) = n(\lambda)\langle E \rangle(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right)}$$ Ley de Planck

La constante de Planck, h, se ajusta para fitear el experimento. → da perfecto!