

Guía 4: Teoría Cinética

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escriban a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 1: La función de distribución de velocidades escalares de un grupo de N partículas está definida por

$$dN_v = \begin{cases} k dv & 0 < v < V \\ 0 & v > V \end{cases}$$

1. Graficar la función de distribución
2. Hallar la constante k en función de N y V
3. Hallar la velocidad media y v_{cm} en función de V
4. Rehacer lo anterior pero para la distribución

$$dN_v = \begin{cases} k v dv & 0 < v < V \\ 0 & v > V \end{cases}$$

Solución:

Para resolver este problema es necesario comprender el concepto de función de distribución de probabilidades. La función de distribución de probabilidades representa la densidad de probabilidad que una partícula se encuentre en un estado dado entre x_1 y $x_1 + dx_1$ tal que

$$f(x_1) = \frac{1}{N} \frac{dN}{dx_1} \quad (1)$$

donde dN es el número de formas posibles en que la partícula puede hallarse en x_1 . El número total de estados posibles para la partículas es:

$$N = \int dN \quad (2)$$

La probabilidad de que la partícula pueda estar en un estado posible entre x_1 y $x_1 + dx_1$ será:

$$\Delta P = \int_{x_1}^{x_1+dx_1} f(x_1) dx_1 = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} \quad (3)$$

La probabilidad de que la partícula pueda estar en cualquier estado es 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{N} \frac{dn}{dx_1} dx_1 = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} dn = 1 \quad (4)$$

El promedio de cualquier variable $v(x_1)$ se obtiene como la “suma” de los productos de los valores de esta variable en un estado determinado por la probabilidad de dicho estado; en el continuo sería:

$$\langle v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v(x_1) f(x_1) dx_1 \quad (5)$$

Aplicado esto al ejemplo del problema 1:

a) La función de distribución es: $f(v) = \frac{k}{N} \frac{dN}{dv} \Rightarrow f(v) \frac{1}{V}$

b) $N = \int dn = \int_0^V k dv = kV \rightarrow k = \frac{N}{V}$

c)

$$\langle v \rangle = \int_0^V v \frac{1}{V} dv = \frac{v^2}{2V} \Big|_0^V = \frac{V}{2} \quad (6)$$

siendo:

$$v_{max} = V \Rightarrow \langle v^2 \rangle = \int_0^V v^2 \frac{1}{V} dv = \frac{V^2}{3}$$

d) La función distribución sería: $f(v) = \frac{kv}{N}$ con $k = \frac{2N}{V^2}$

$$N = \int dn = \int_0^V kv dv = \frac{kv^2}{2} \rightarrow k = \frac{2N}{V^2} \rightarrow \langle v \rangle = \int_0^V v \frac{2v}{V^2} dv = \frac{2}{3}V \quad (7)$$