

Momento angular

El momento angular es una cantidad relevante en la física dado que bajo ciertas condiciones se conserva y esta conservación nos permite obtener información de los sistemas con los que trabajamos, como ya habrán visto en materias anteriores. La idea de este apunte es llevar el momento angular que ya conocen de física clásica a la física cuántica. Como ocurrió con el momento lineal, escribiremos el momento angular como un operador y trabajaremos con todo lo que ello conlleva. También veremos como se escribe en coordenadas esféricas, lo que nos permitirá ver que autofunciones le corresponden.

Sabemos que el momento angular \vec{L} se escribe

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (1)$$

siendo \vec{r} el vector posición y \vec{p} el momento lineal. Descomponiendo la Ec. 1 en sus componentes tenemos

$$L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x. \quad (2)$$

Para llevar Ec. 2 a operadores vamos a ir al espacio de posición en el que trabajamos usualmente e identificar cada termino. Sabemos que $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$, entonces escribimos

$$L_x = -i\hbar(y\partial_z - z\partial_y), \quad L_y = -i\hbar(z\partial_x - x\partial_z), \quad L_z = -i\hbar(x\partial_y - y\partial_x), \quad (3)$$

donde utilizamos la notación ∂_i para escribir la derivada parcial en función de la coordenada i -ésima. De forma más general podemos escribir $\vec{L} = -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla}$.

El hecho de que el momento angular tome esta forma tiene ciertas implicancias. La primera que podemos observar es que sus componentes no conmutan entre si. Esta es una observación importante porque nos dice que no podemos construir una base de autofunciones que incluya a las 3 componentes a la vez, sino que solamente podemos utilizar una de ellas. Este es un resultado fácil de obtener y se ve que

$$[L_i, L_j] = i\hbar L_k, \quad (4)$$

donde (i, j, k) son las coordenadas (x, y, z) pero escritas de forma general. La Ec. 4 nos dice que el conmutador de las componentes se comporta de forma cíclica, siendo que para reemplazar $i = y$ es necesario ‘avanzar’ o ‘retroceder’ las coordenadas, i.e. $(i, j, k) = (y, z, x)$. Es importante notar que este mismo resultado que nos habla de la no-conmutatividad entre componentes también nos permite obtener que cada componente por separado conmuta con L^2 , que no es más que multiplicar (u operar) por \vec{L} dos veces. Entonces, la Ec. 4 nos permite obtener que

$$[L^2, L_i] = 0, \quad i = x, y, z. \quad (5)$$

También podemos escribir el resultado de la Ec. 5 como $[L^2, \vec{L}] = 0$, donde se debe resaltar que el 0 es en términos vectoriales y no escalares.

Como en el oscilador armónico podemos definir operadores de subida y bajada para el momento angular. Estos no tienen significado físico pero son útiles para realizar desarrollar expresiones con operadores, en caso de ser necesario. Se define

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y. \quad (6)$$

Se pueden calcular los siguientes conmutadores y ver que

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm}, \quad (7)$$

$$[L^2, L_{\pm}] = 0. \quad (8)$$

Estos resultados salen directamente de las Ecs. 4 y 5. También podemos ver que se cumple una igualdad que nos permitirá calcular más fácil L^2 :

$$L_{\pm}L_{\mp} = (L_x + iL_y)(L_x - iL_y) = L_x^2 + L_y^2 \mp i[L_x, L_y] = L^2 - L_z^2 \mp i(i\hbar L_z) \Rightarrow L^2 = L_{\pm}L_{\mp} + L_z^2 \mp \hbar L_z. \quad (9)$$

De ahora en adelante vamos a suponer que tenemos L_z y L^2 como operadores de nuestro sistema y autofunciones f con los siguientes autovalores

$$L^2 f = \lambda f \quad (10)$$

$$L_z f = \mu f. \quad (11)$$

Por el momento vamos a considerarlos genéricos y veremos que valores deben tomar. Empecemos viendo que si f es autofunción de L^2 y L_z entonces también lo es $L_{\pm}f$:

$$L^2(L_{\pm}f) = L_{\pm}(L^2 f) = L_{\pm}(\lambda f) = \lambda(L_{\pm}f), \quad (12)$$

$$L_z(L_{\pm}f) = ([L_z, L_{\pm}] + L_{\pm}L_z)f = (\pm\hbar L_{\pm} + L_{\pm}\mu)f = (\mu \pm \hbar)(L_{\pm}f). \quad (13)$$

Este último desarrollo nos permite ver como funcionan los operadores de subida y de bajada: dada una autofunción f de L_z los operadores L_{\pm} aumentan o disminuyen el autovalor de f por \hbar . De esta manera nos queda una serie de autovalores discretos espaciados en \hbar , siendo L_+f o L_-f otras posibles autofunciones de L_z . Eventualmente uno debería llegar a los límites superiores e inferiores¹. Supongamos ahora una autofunción f_t para la cual $L_+f = 0$, entonces podríamos escribir los autovalores de f como

$$L_z f_t = \hbar l f_t, \quad L^2 f_t = \lambda f_t, \quad (14)$$

donde ya estamos agregando un factor \hbar para los autovalores de L_z por el resultado anterior. A la vez estamos introduciendo el numero cuántico asociado al momento angular: se define l como el **número cuántico azimutal** y es el que discretiza el momento angular. A través de la Ec. 9 se puede ver que

$$L^2 f_t = \hbar^2 l(l+1) f_t, \quad (15)$$

lo cual nos determina el autovalor de L^2 en términos del máximo autovalor de L_z y debe ser $\lambda = \hbar^2 l(l+1)$. De la misma manera podemos tomar una autofunción f_b tal que $L_-f_b = 0$ y con autovalor de $L_z f_b = \hbar \bar{l} f_b$. Con un desarrollo análogo se llega a que se debe cumplir $\bar{l} = -l$. Por lo tanto, los autovalores de L_z deben ser tales que van de $-\hbar l$ a $\hbar l$ en pasos de \hbar . Juntando este resultado con el que ya obtuvimos para λ tenemos que

$$L^2 f_l^m = \hbar^2 l(l+1) f_l^m, \quad L_z f_l^m = \hbar m f_l^m, \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l. \quad (16)$$

Se define m como la **proyección del momento angular**. Para un l fijo se tienen $2l+1$ proyecciones posibles. Por el momento no tenemos un resultado que fije los valores posibles de l pero veremos más adelante que estos son $l = 0, 1, 2, \dots$. Hasta acá podemos obtener todos los resultados posibles sin considerar que expresión debe tomar f_l^m .

A continuación vamos a resolver el problema 7 de la guía, el cual nos pide calcular las componentes de \vec{L} y L^2 en coordenadas esféricas y ver que autofunciones les corresponden.

Problema 7

Este problema esta pensado para guiarnos a obtener un resultado importante de momento angular y es que **los armónicos esféricos son las autofunciones de la dependencia angular**.

¹Se puede ver que si f es autofunción de L^2 y L_z entonces el autovalor de L_z no puede ser mayor que el de L^2 .

Esto quiere decir que siempre que podamos separar la dependencia angular de la radial podremos escribir la autofunción como una multiplicación de autofunciones para cada variable.

Para empezar a resolver este problema es muy útil escribir $\vec{L} = -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla}$ y ver que esta primera parte se reduce a escribir \vec{r} y $\vec{\nabla}$ en coordenadas esféricas. La parte radial es la más sencilla de ver pues es simplemente $\vec{r} = r\hat{r}$. Ahora necesitamos escribir el gradiente $\vec{\nabla}$ en coordenadas esféricas. En este punto podríamos derivarlo utilizando la transformación de coordenadas usual o podríamos tomar el resultado de hacer tal transformación. Vamos a tomar el resultado por simplicidad, pero sepan que es un desarrollo que pueden hacer (y que posiblemente ya lo hayan visto en una materia anterior). El gradiente $\vec{\nabla}$ se escribe en esféricas

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\phi}. \quad (17)$$

Utilizando la Ec. 17 y la definición vectorial de \vec{L} podemos llegar a que

$$\vec{L} = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\phi}\right). \quad (18)$$

Este resultado nos permite llegar a las expresiones de las componentes de \vec{L} mediante la siguiente identificación de versores:

$$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\hat{y} - \sin\theta\hat{z}, \quad (19)$$

$$\hat{\phi} = -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}. \quad (20)$$

Reemplazando estas expresiones en la Ec. 18 podemos llegar a ver que

$$\begin{cases} L_x = i\hbar(\sin\phi\partial_\theta + \cos\phi\cot\theta\partial_\phi), \\ L_y = -i\hbar(\cos\phi\partial_\theta - \sin\phi\cot\theta\partial_\phi), \\ L_z = -i\hbar\partial_\phi. \end{cases} \quad (21)$$

Nuevamente usando la expresión vectorial de \vec{L} podemos desarrollar la expresión de L^2 :

$$L^2 = \left(-i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla}\right)\left(-i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla}\right) = -\hbar^2\vec{r} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \left(\vec{r} \times \vec{\nabla}\right)\right] = -\hbar^2r^2\nabla^2. \quad (22)$$

Ahora solamente nos queda mostrar que las autofunciones de estos operadores (las que definimos como f_l^m en la sección anterior) son los armónicos esféricos. En vez de resolver el Hamiltoniano de una partícula libre en esféricas (o con un potencial unicamente con dependencia radial) vamos a tomar un camino menos pesado en las cuentas. Para ello vamos a empezar viendo que, a partir de las Ecs. 21, los operadores de subida y bajada se escriben

$$L_\pm = L_x \pm iL_y = \pm\hbar e^{\pm i\phi}(\partial_\theta \pm i\cot\theta\partial_\phi). \quad (23)$$

Con este resultado preliminar vamos a utilizar los resultados vistos en la Ec. 16 y las expresiones en esféricas dadas en la Ec. 21 para determinar f_l^m . Ya sabemos como debe ser el autovalor de L_z y juntandolo con su expresión en esféricas llegamos a la ecuación diferencial

$$L_z f_l^m = -i\hbar\partial_\phi f_l^m = \hbar m f_l^m \quad \Rightarrow \quad f_l^m = g_l^m(\theta)e^{im\phi}, \quad (24)$$

donde $g_l^m(\theta)$ es una constante de integración para dicha ecuación diferencial pero que a priori podría depender de θ y de los números cuánticos m y l . También conocemos la forma que deben tomar los

autovalores de L^2 y junto a la igualdad de la Ec. 9 con la expresión en esféricas dada en la Ec. 23 se llega a que

$$\begin{aligned}
 L^2 f_l^m &= (L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z) f_l^m \\
 &= \hbar e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) (-\hbar e^{-i\phi}) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) f_l^m - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} f_l^m + i \hbar \frac{\partial}{\partial \phi} f_l^m \\
 &= \hbar^2 l(l+1) f_l^m.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Este resultado nos permitirá obtener una ecuación diferencial para $g_l^m(\theta)$ y para ello vamos a usar que $\partial_\theta f = e^{im\phi} \partial_\theta g$ y $\partial_\phi f = im e^{im\phi} g$. Con estas derivadas podemos reescribir la Ec. 25 y llegar a que

$$e^{im\phi} \left[-\frac{d}{d\theta} \left(\frac{d}{d\theta} g + mg \cot \theta \right) + (m-1) \cot \theta \left(\frac{d}{d\theta} g + mg \cot \theta \right) + m(m-1)g \right] = l(l+1) g e^{im\phi}. \tag{26}$$

Ahora podemos cancelar las $e^{im\phi}$ y desarrollando la expresión llegar a

$$-\frac{d^2 g}{d\theta^2} - \cot \theta \frac{dg}{d\theta} + m^2 g \csc^2 \theta = l(l+1)g, \tag{27}$$

para la cual si multiplicamos por $-\sin^2 \theta$ llegamos a

$$\sin^2 \theta \frac{d^2 g}{d\theta^2} + \sin \theta \cos \theta \frac{dg}{d\theta} - m^2 g = -l(l+1) \sin^2 \theta g. \tag{28}$$

Reescribiendo esta última expresión podemos llevarla a una forma un poco más reconocible y ver que es

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} g \right) + [l(l+1) \sin^2 \theta - m^2] g = 0. \tag{29}$$

Esta ecuación diferencial es la que cumple la variable θ de los armónicos esféricos $Y_l^m(\theta, \phi)$ y como la parte que depende de ϕ es idéntica a la de los $Y_l^m(\theta, \phi)$ podemos llegar a la conclusión de que **los armónicos esféricos son las autofunciones de L^2 y L_z .**