

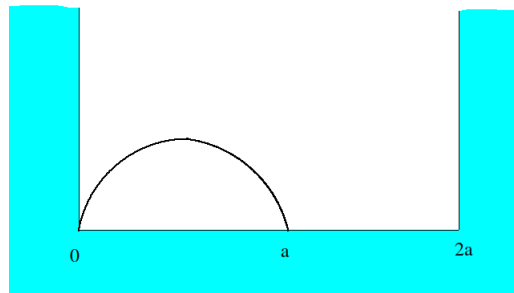
Guía 8: Oscilador armónico, Pozos de Potencial en una dimensión

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escriban a carlosv@df.uba.ar o Claudio Archubi archubi@iafe.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 12: Considere un pozo infinito unidimensional de ancho a que en un momento dado se expande súbitamente hasta duplicar su ancho (*i.e.* pasa de $[0, a]$ a $[0, 2a]$). La partícula que hay dentro, antes de la expansión se encuentra en el estado fundamental. Se pide:

1. Un gráfico del perfil de la función de onda en el instante inmediatamente posterior a la expansión, las nuevas autoenergías del hamiltoniano y los correspondientes períodos de oscilación (los periodos de oscilación de las autofunciones asociadas a cada energía).
2. El tiempo que debe dejarse transcurrir para poder restaurar el pozo a su anchura original, de modo tal que la función de onda vuelva a ser la correspondiente al estado fundamental del pozo de lado a .
3. Suponiendo que la función de onda del pozo expandido puede aproximarse por sus dos componentes de más baja energía, calcular en función del tiempo la probabilidad de encontrar a la partícula en la mitad nueva del pozo (o sea, entre a y $2a$).

Solución: Al expandirse el pozo cambia la base de autofunciones y $\Psi_0(x)$ ya no forma parte de esa base.



Tenemos que:

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{a} x \right) & \text{si } x \leq a \\ 0 & \text{si } x \geq a \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{con } E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

La nueva base del pozo ampliado es:

$$\Psi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2a} x \right) \quad \text{si } 0 \leq x \leq 2a \quad (2)$$

$$\text{con } E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{8ma^2}$$

Antes de la expansión la función de onda completa era:

$$\Psi_0(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{a} x \right) e^{-i\omega_0 t} \quad (3)$$

con $\omega_0 = \frac{E_0}{\hbar} = \frac{\hbar\pi^2}{2ma^2}$ después $\omega_n = \frac{\hbar n^2\pi^2}{8ma^2}$

Entonces $T_n = 4T_0/n^2$

b) La función de onda original $\Psi_0(x, t)$ se va a deformar a medida que transcurre el tiempo porque ya no forma parte de la nueva base. Expandida en la nueva base estará constituida por una combinación de infinitas autofunciones de dicha base:

$$\Psi_0(x, t) = \sum_n a_n \Psi_n(x, t) = \sum_n a_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) e^{-iE_n t/\hbar} \quad (4)$$

transcurrido un cierto tiempo t , todas las componentes volverán a estar en fase otra vez:

$$\Psi(x, 0) = \sum_n a_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) = \sum_n a_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) e^{-iE_n t/\hbar} \quad (5)$$

¿Cuánto vale t ?

$$\forall \rightarrow \frac{E_n}{\hbar}t = 2s_n\pi \text{ con } s_n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Entonces } t = \frac{2\pi s_n \hbar}{n^2 E_1}$$

Para que la componente con $n = 1$ vuelva a estar en fase con su valor inicial deberá cumplir que $\frac{E_1 t_1}{\hbar} = 2\pi s_1$

Entonces para que una componente cualquiera vuelva a su fase original: $t_n = \frac{s_n t_1}{s_1 n^2}$ y como puede elegir... elijo $s_n = s_1 n^2$ Por lo tanto $t_n = t_1 \quad \forall n \rightarrow t = t_1$

c) Suponemos que $\Psi_0(x, t) = \sum_{n=1}^2 a_n \text{sen}(n\pi x/(2a)) e^{-iE_n t/\hbar} = \frac{a_1}{\sqrt{a}} \text{sen}(\pi x/(2a)) e^{-iE_1 t/\hbar} + \frac{a_2}{\sqrt{a}} \text{sen}(\pi x/a) e^{-iE_2 t/\hbar}$

La probabilidad de hallar a la partícula entre a y $2a$ será:

$$P(a \leq x \leq 2a) = \int_a^{2a} |\Psi_0(x, t)|^2 dx = \int_a^{2a} \Psi_0(x, t) \Psi_0^*(x, t) dx = \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} - \frac{8}{3} a_1 a_2 \cos[(E_2 - E_1)t/\hbar] \quad (6)$$

Veamos cuanto vale a_1 y a_2 :

$$a_n = \int_0^{2a} \Psi_0(x) \Psi_n(x) dx = \dots = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi \text{sen}(nu/2) \text{sen} u du \quad (7)$$

Las soluciones son:

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{4}{3} \quad (n = 1)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (n = 2)$$

Por lo que la probabilidad es:

$$P(x) = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4} - \frac{8}{3} \frac{4}{3\pi} \cos\left(\frac{\hbar 3\pi^2 t}{8na^2}\right) \quad (8)$$