Clase 2.1

Hacia la Mecánica Cuántica

Radiación del cuerpo negro

Radiación térmica: radiación emitida por un cuerpo debido a su temperatura. Todos los cuerpos emiten y absorben radiación de su alrededor. La forma detallada del espectro de radiación térmica de un cuerpo caliente depende de la temperatura y de la composición del cuerpo.

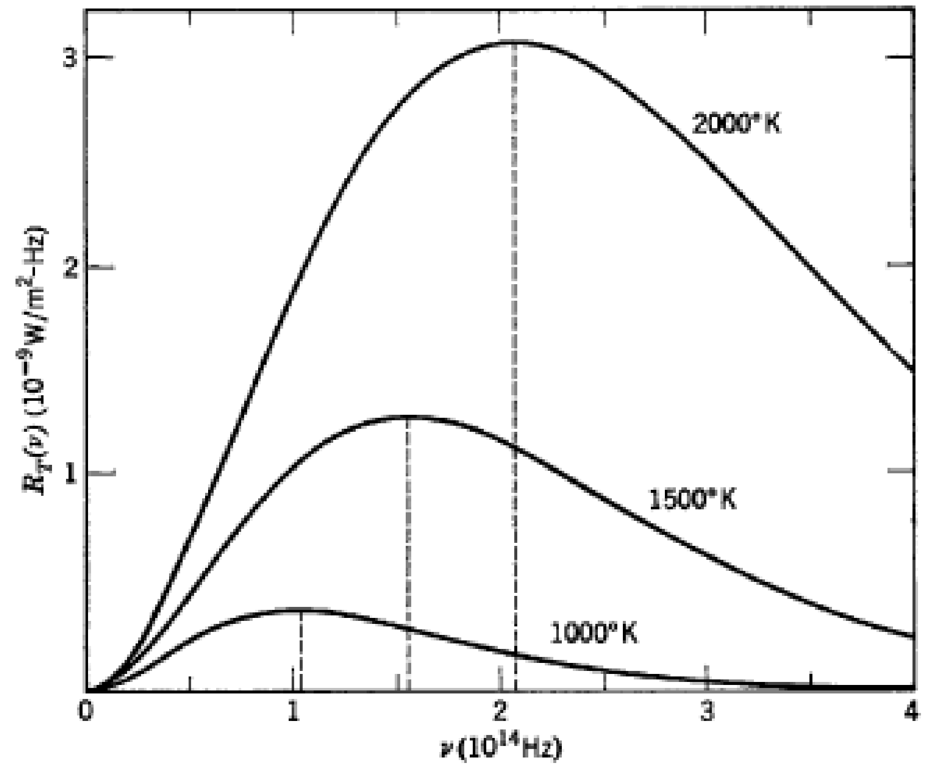
Cuerpo negro: experimentalmente se encuentra que hay una clase de cuerpos que emiten espectros térmicos de carácter universal. Absorben toda la radiación que incide sobre ellos. No reflejan luz. Independientemente de su composición todos los cuerpos negros a la misma temperatura emiten la misma radiación térmica con el mismo espectro.

Nos interesa:

$R_T(\nu)$ → Radiancia espectral

$R_T(\nu)d\nu$ → Es la energía emitida en forma de radiación con frecuencias entre ν y $\nu+d\nu$

Veamos la medición experimental de la radiancia de un cuerpo negro:



$$R_T = \int_0^{\infty} R_T(\nu)\, d\nu$$

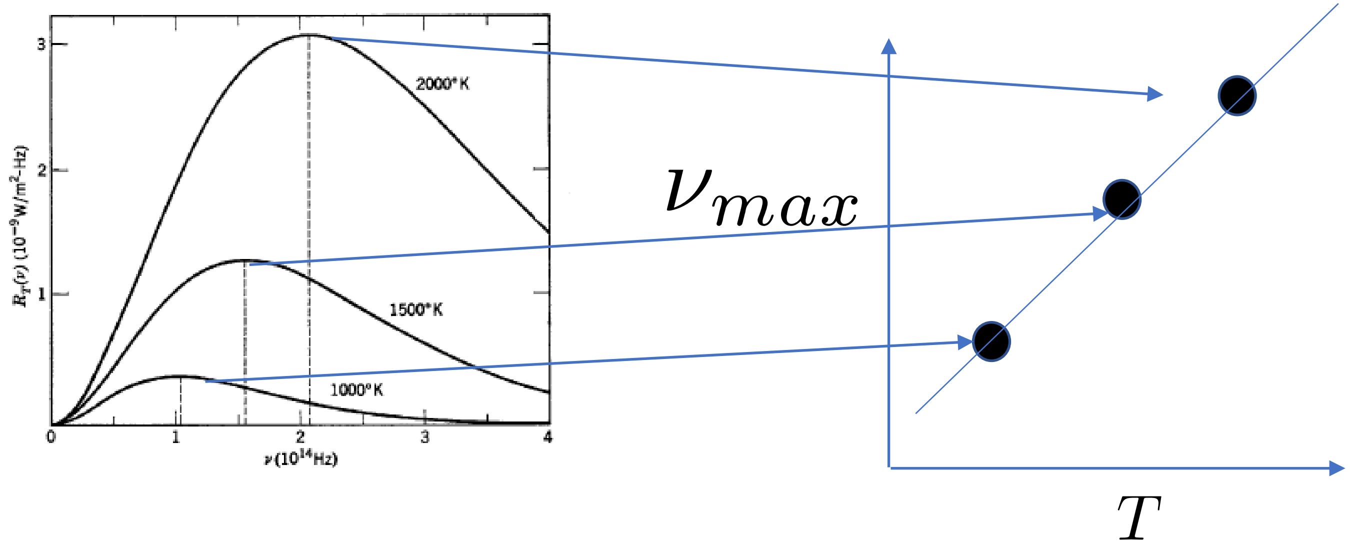
Energía total emitida: energía total por unidad de tiempo y unidad de área

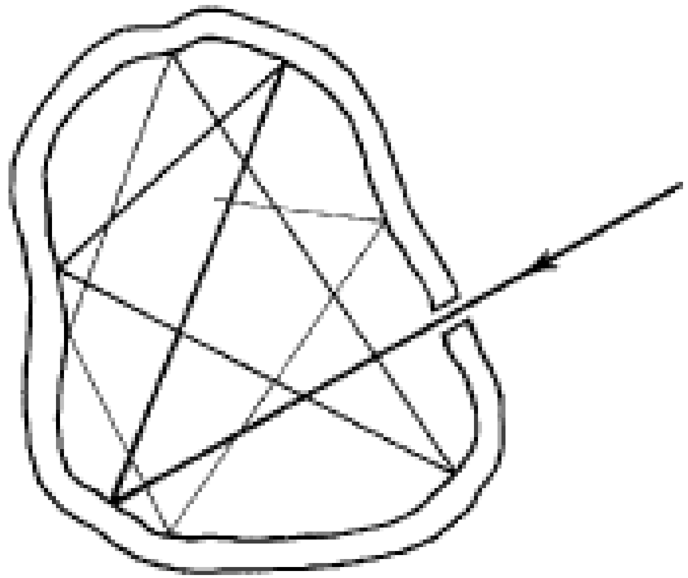
Ley de Stefan (1879) $\boxed{R_T = \sigma T^4}$

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2\text{-}^\circ K^4}$$

Constante de Stefan Boltzmann

Ley de desplazamiento de Wien (1879) $\boxed{\nu_{max} \propto T}$





$$\rho_T(\nu) \propto R_T(\nu)$$

Radiación de la cavidad: energía contenida por unidad de volumen a temperatura T en el intervalo de frecuencias ν y ν+dν

Teoría clásica de la cavidad radiante (Rayleigh-Jeans)

Ecs. de Maxwell:

① $\vec{\nabla} \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$ Ley de gauss

② $\vec{\nabla} \vec{B} = 0$

③ $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Ley de Faraday

④ $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ Ley de Ampere generalizada

ε_0 permitividad del vacío $= 8,854 \times 10^{-12}$ F/m

μ_0 permeabilidad magnética $= 4\pi \times 10^{-7}\ \Omega . s^2$

Maxwell además descubre que $c = \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}$

tomo $\nabla\times$ a ③

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{B}\right)$$

$$-\nabla^2\vec{E} + \underbrace{\nabla.(\nabla\vec{E})}_{=0} = -\frac{\partial}{\partial t}\mu_0\left(\underbrace{\vec{J}}_{\downarrow\, 0} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

0 en el vacío

$$\Rightarrow \boxed{-\nabla^2\vec{E} = -\mu_0\,\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}} \rightarrow \boxed{\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

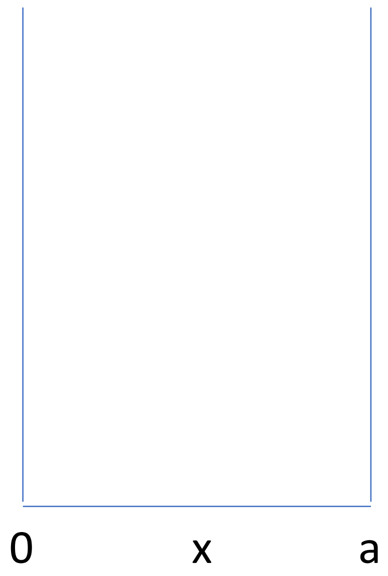
comparando con el de onda: $\boxed{\mu_0\,\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}}$

Entonces cada componente:

$$\nabla^2 E_i = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2}$$ ec de onda

$\bar{E} = (E_x, E_y, E_z)$

y cada $E_i = E_i(x, y, z, t)$



CASO UNIDIMENSIONAL

$$E(x,t) = A\, e^{+i(kx-\omega t)} + B\, e^{i(-kx-\omega t)}$$

$$\Rightarrow E(x,t) = e^{-i\omega t}\left(A e^{ikx} + B e^{-ikx}\right)$$

$$E(x=0,t)=0 \Rightarrow A=-B$$

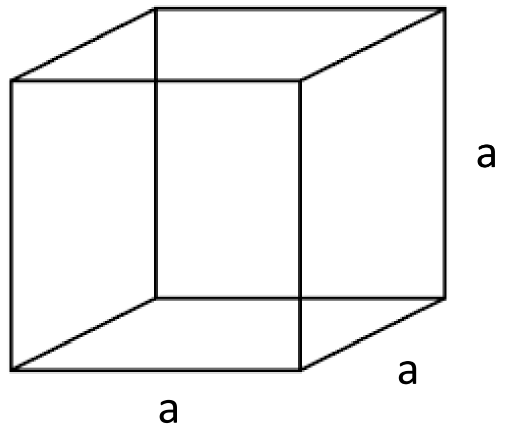
$$\Rightarrow E(x,t) = A' e^{-i\omega t}\left(\operatorname{sen} kx\right)$$

$$\operatorname{sen} ka = 0 \Rightarrow \boxed{k = \frac{2\pi n}{a}}$$

tomo la parte real:

$$\boxed{E(x,t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)\operatorname{sen}(kx)}$$

Caso 3-D



$\bar{k} = (k_x, k_y, k_z) \Rightarrow \boxed{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$

Entonces $E_i(x,y,z,t) = A e^{+i\bar{k}\bar{x} + i\omega t} + B e^{-i\bar{k}\bar{x} + i\omega t}$

y tengo que $E_i(0,y,z) = 0 = E_i(a,y,z)$

$E_i(x,0,z) = 0 = E_i(x,a,z)$

$E_i(x,y,0) = 0 = E_i(x,y,a)$

no cumple las c.c.

$E_i(x,y,z) = \left(A e^{i\bar{k}\bar{x}} + B e^{-i\bar{k}\bar{x}}\right) e^{i\omega t}$

$E_i(x,y,z) = A \operatorname{sen}(k_x x) \operatorname{sen}(k_y y) \operatorname{sen}(k_z z) \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$

$k_x a = n\pi \Rightarrow k_x = \frac{n\pi}{a}$

idem k_y y k_z

Conteo de estados en 1-D

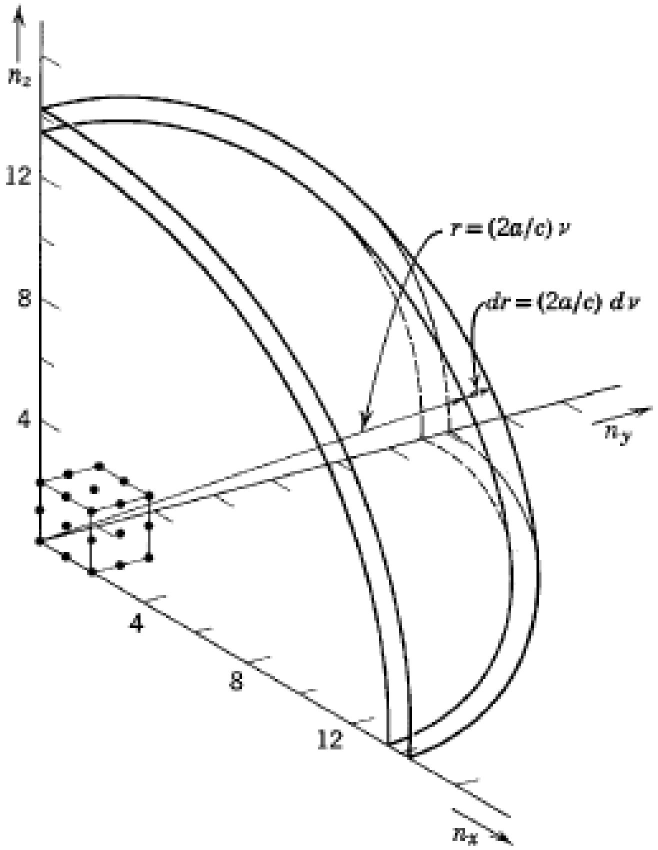
$$N(\nu)d\nu$$ → Número de frecuencias permitidas entre ν y ν+dν

$$\left.\begin{aligned} 2\pi\nu &= w \\ k &= \frac{\pi n}{a} \\ w/k &= c \end{aligned}\right\} \quad \nu = \frac{cn}{2a} \Rightarrow dn = \frac{2a}{c}d\nu$$

Le incluyo un 2 por polarización

$$\Rightarrow N(\nu)d\nu = \frac{4a}{c}d\nu$$

Conteo de estados en 3-D



$$V_{casquete} = \frac{4\pi}{3}\left[(\nu + d\nu)^3 - \nu^3\right] \propto \nu^2 d\nu$$

Conteo de estados en 3-D

$$\nu = \frac{c}{2a}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{c}{2a}r$$

$$dr = \frac{2a}{c}d\nu$$

$$V_{casquete} \longleftarrow \quad N(\nu)d\nu = \frac{\pi r^2}{2}dr$$

se incluye un 2 por polarización

$$N(\nu)d\nu = \frac{\pi r^2}{2}dr = 2\frac{\pi}{2}\nu^2(\frac{2a}{c})^3 d\nu$$

Ya tengo el numero de estados con frecuencias ν y $\nu+d\nu$ ahora tengo que calcular la energía media que tiene cada onda estacionaria

$$\bar{\mathscr{E}} = \frac{\int_0^\infty \mathscr{E} P(\mathscr{E})\, d\mathscr{E}}{\int_0^\infty P(\mathscr{E})\, d\mathscr{E}}$$

$$P(\mathscr{E}) = \frac{e^{-\mathscr{E}/kT}}{kT}$$

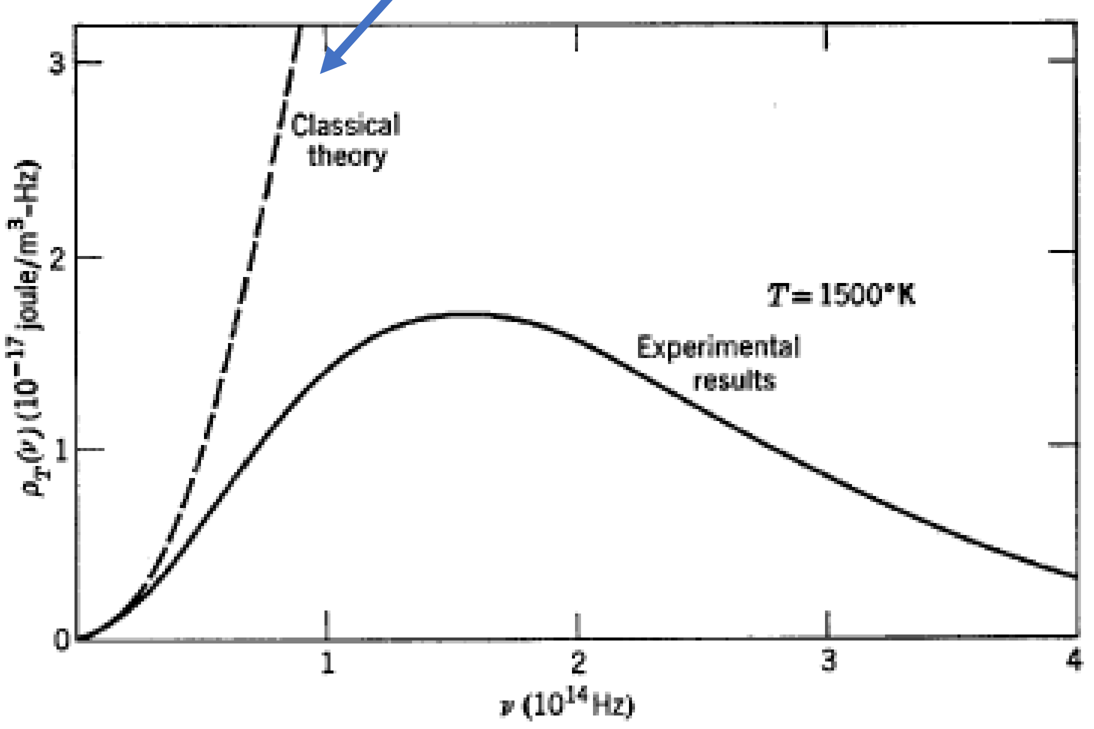
Distribución de Boltzmann

$$\bar{\mathscr{E}} = kT$$

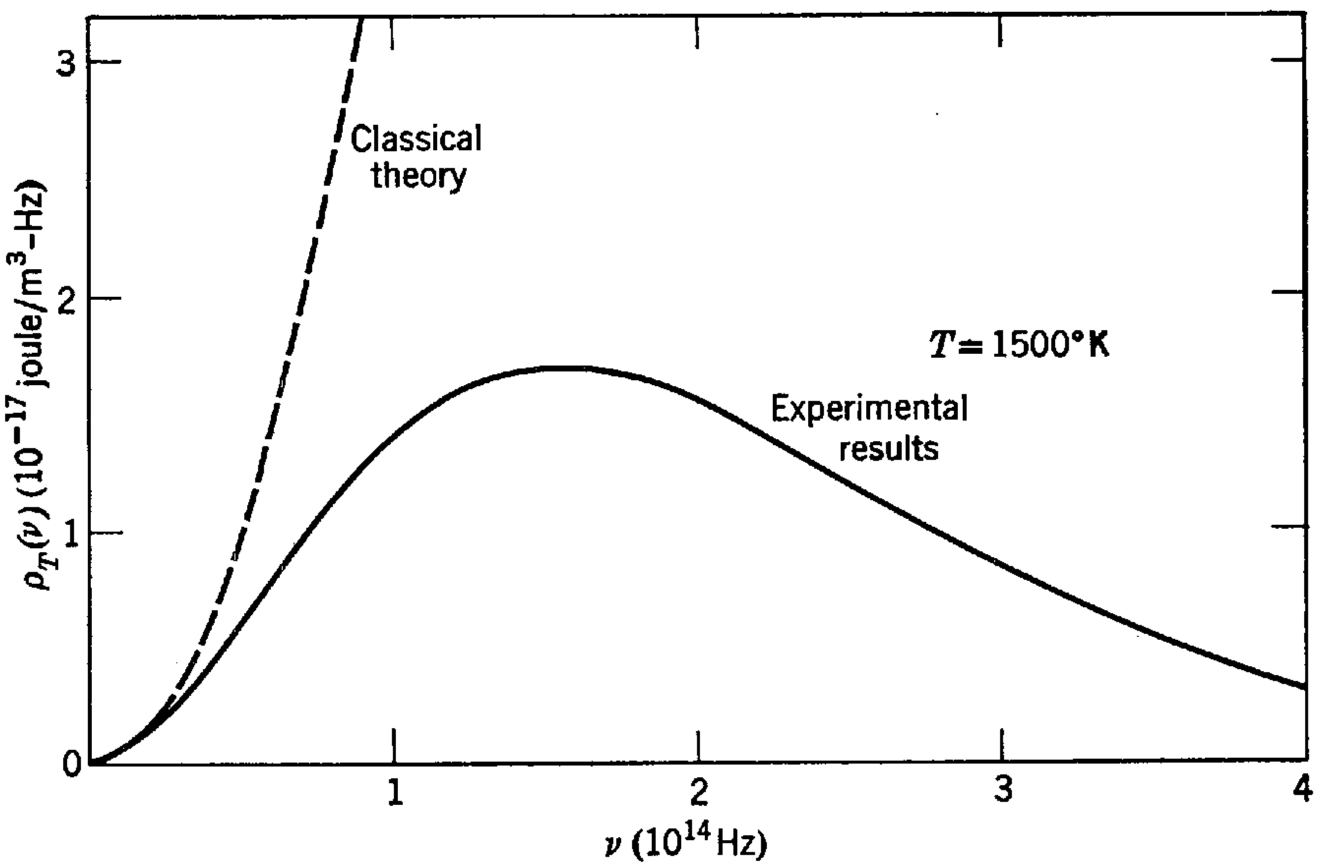
Formula de Rayleigh-Jeans para la radiación del cuerpo negro

$$\boxed{\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3}d\nu}$$

Formula de Rayleigh-Jeans para la radiación del cuerpo negro:

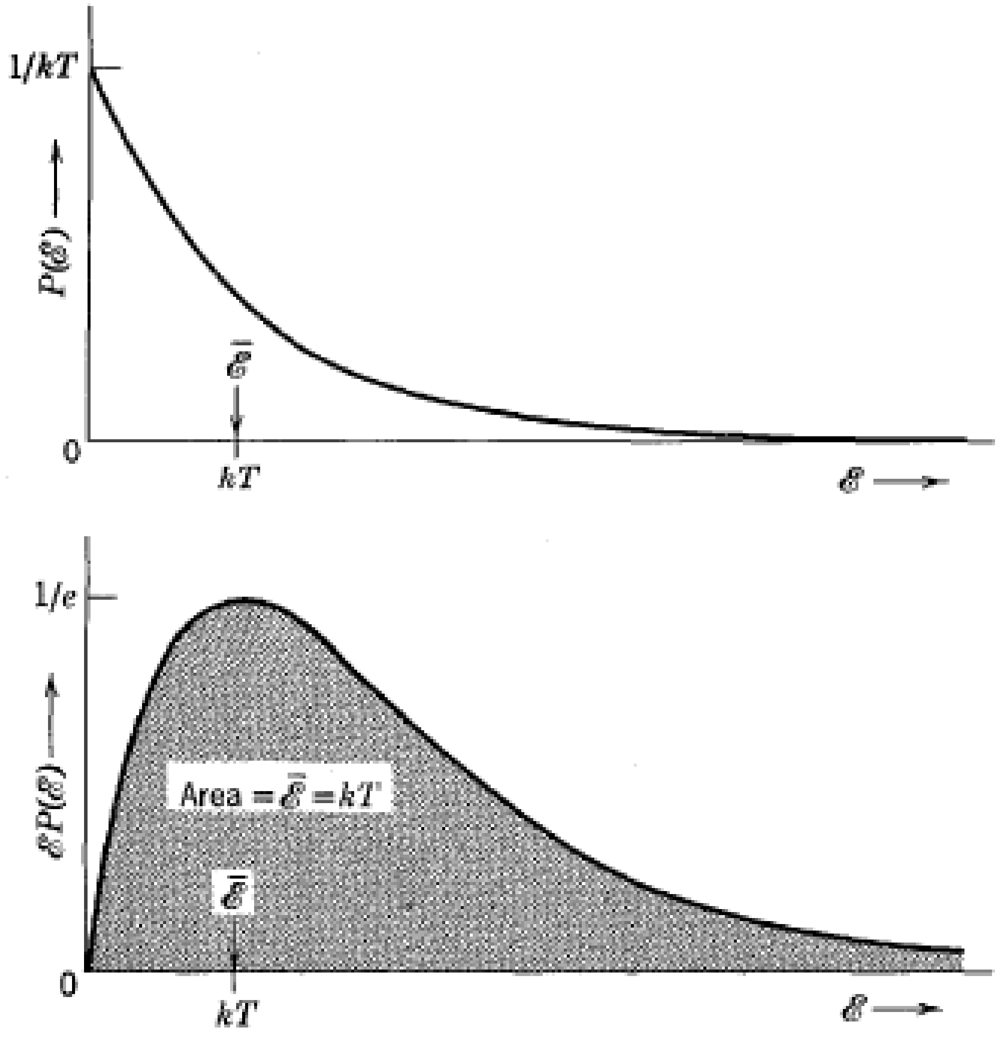


Algo anda mal!!!!

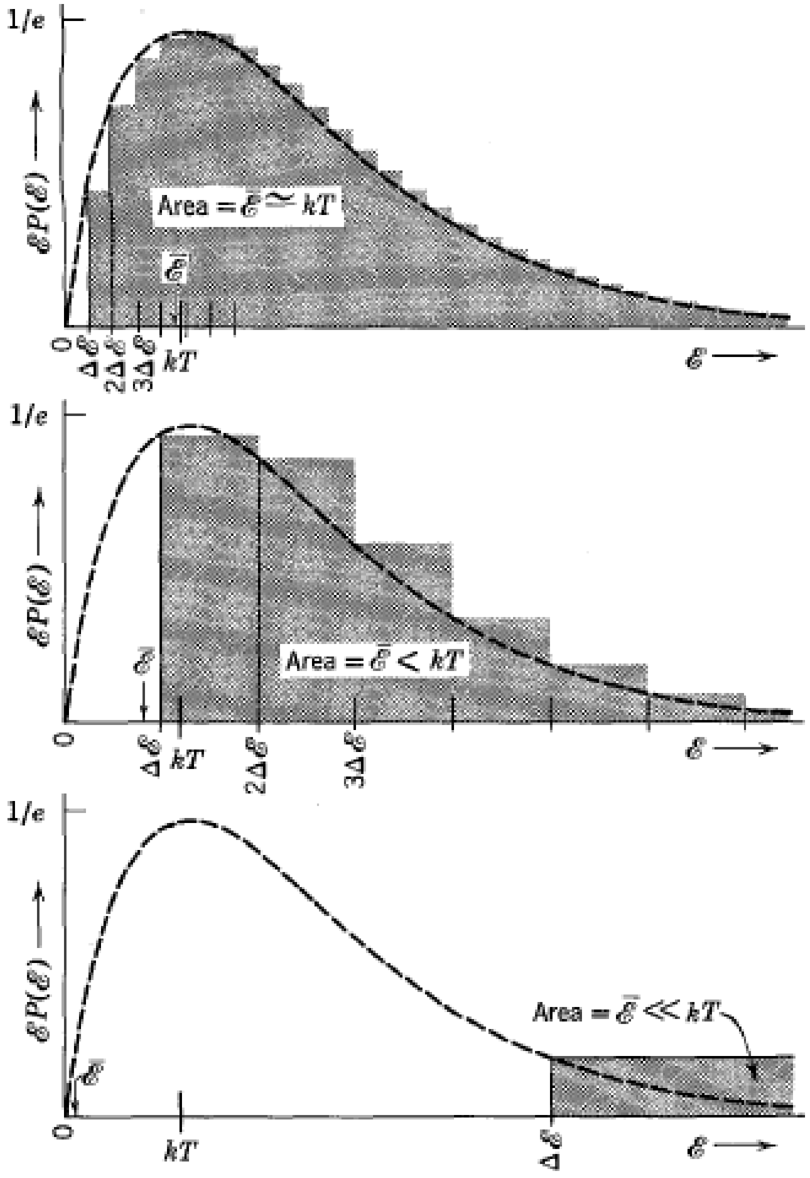


Quiero que: $\bar{\mathscr{E}} \xrightarrow[\nu \to 0]{} kT$ $\bar{\mathscr{E}} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0$

Veamos que pensó Planck…..



1/kT
P(ℰ)
ℰ̄
0
kT
ℰ
1/e
ℰP(ℰ)
Area = ℰ̄ = kT
ℰ̄
0
kT
ℰ



1/e
$\mathscr{E}P(\mathscr{E})$
Area = $\bar{\mathscr{E}} \simeq kT$
$\bar{\mathscr{E}}$
0
$\Delta\mathscr{E}$
$2\Delta\mathscr{E}$
$3\Delta\mathscr{E}$
kT
$\mathscr{E}$
1/e
$\mathscr{E}P(\mathscr{E})$
Area = $\bar{\mathscr{E}} < kT$
$\bar{\mathscr{E}}$
0
$\Delta\mathscr{E}$
kT
$2\Delta\mathscr{E}$
$3\Delta\mathscr{E}$
$\mathscr{E}$
1/e
$\mathscr{E}P(\mathscr{E})$
Area = $\bar{\mathscr{E}} \ll kT$
$\bar{\mathscr{E}}$
0
kT
$\Delta\mathscr{E}$
$\mathscr{E}$

Teoría cuántica de la cavidad radiante (Planck)

$$\epsilon = 0, \Delta\epsilon, 2\Delta\epsilon...$$

$$\boxed{\Delta\epsilon = h\nu}$$

$$h = 6.63 \times 10^{-34} Js$$

Teoría cuántica de la cavidad radiante (Planck)

$$\bar{\mathscr{E}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{E} P(\mathscr{E})}{\sum_{n=0}^{\infty} P(\mathscr{E})}$$

¿de donde sale?

$$\bar{\mathscr{E}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nh\nu}{kT} e^{-nh\nu/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{kT} e^{-nh\nu/kT}} = kT \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}$$

$$\alpha = \frac{h\nu}{kT}$$

Teoría cuántica de la cavidad radiante (Planck)

$$-\alpha \frac{d}{d\alpha} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = \frac{-\alpha \frac{d}{d\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}} = \frac{-\sum_{n=0}^{\infty} \alpha \frac{d}{d\alpha} e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}$$

$$\bar{\mathscr{E}} = kT\left(-\alpha \frac{d}{d\alpha} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} \right) = -h\nu \frac{d}{d\alpha} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}$$

Teoría cuántica de la cavidad radiante (Planck)

$$\bar{\mathscr{E}} = -h\nu \frac{d}{d\alpha} \ln (1 - e^{-\alpha})^{-1}$$

$$= \frac{-h\nu}{(1 - e^{-\alpha})^{-1}} (-1)(1 - e^{-\alpha})^{-2} e^{-\alpha}$$

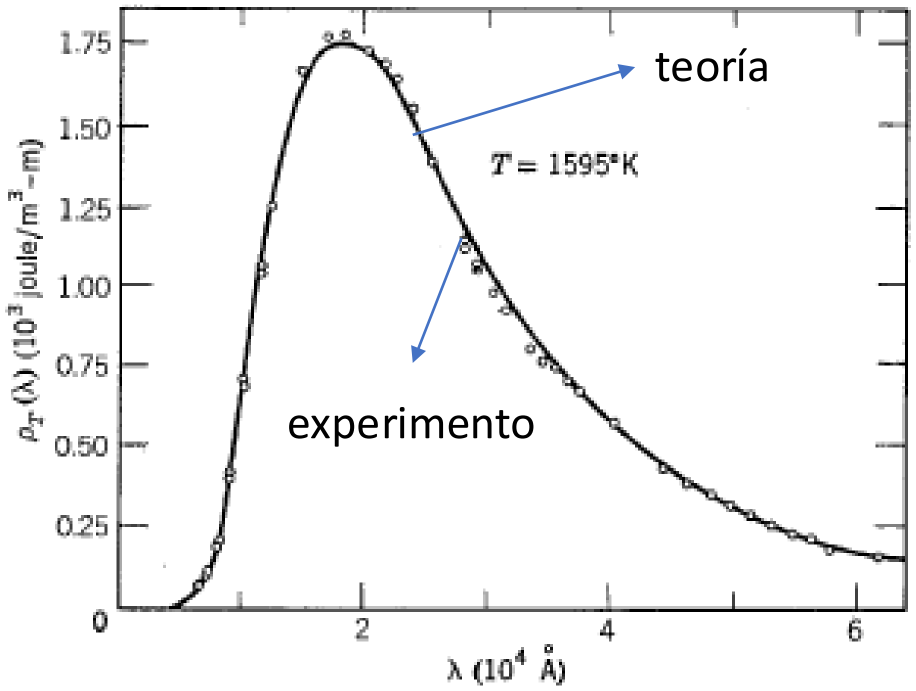
$$= \frac{h\nu e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} = \frac{h\nu}{e^{\alpha} - 1} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$$\nu = c/\lambda$$

$$\rho_T(\lambda) = -\rho_T(\nu)\frac{d\nu}{d\lambda} = \rho_T(\nu)\frac{c}{\lambda^2}$$

$$\boxed{\rho_T(\lambda)\, d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1}}$$

Teoría cuántica de la cavidad radiante (Planck)



Clase 2.2

Hacia la Mecánica Cuántica

Efecto fotoeléctrico (1905)

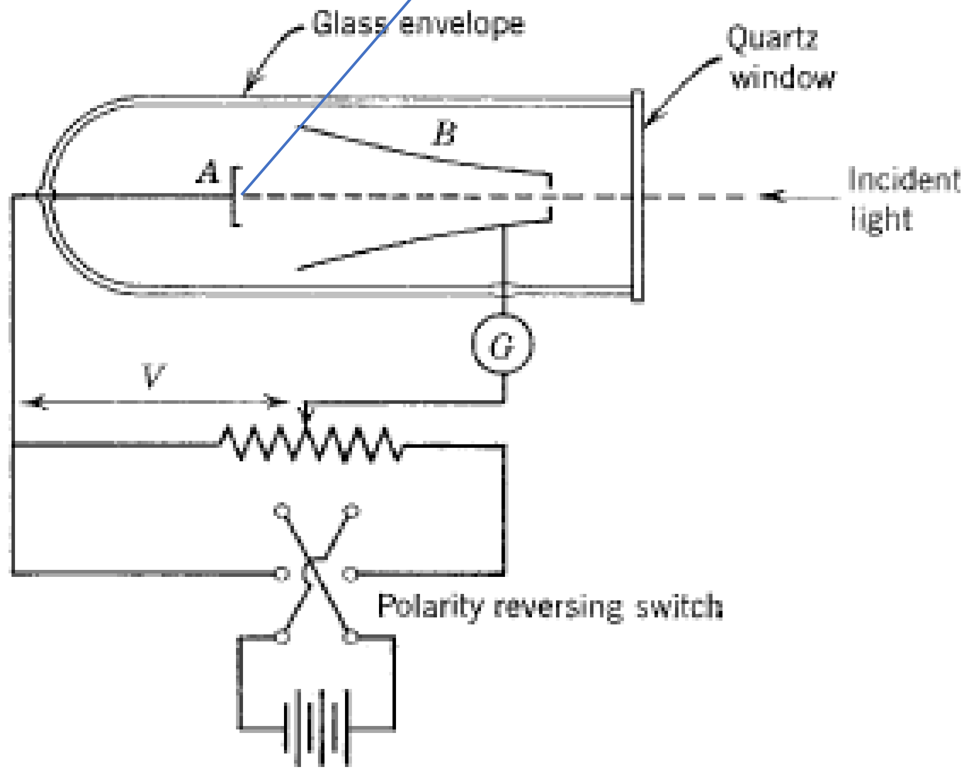
Efecto Comptom (1923)

- Interacción de la radiación con la materia.

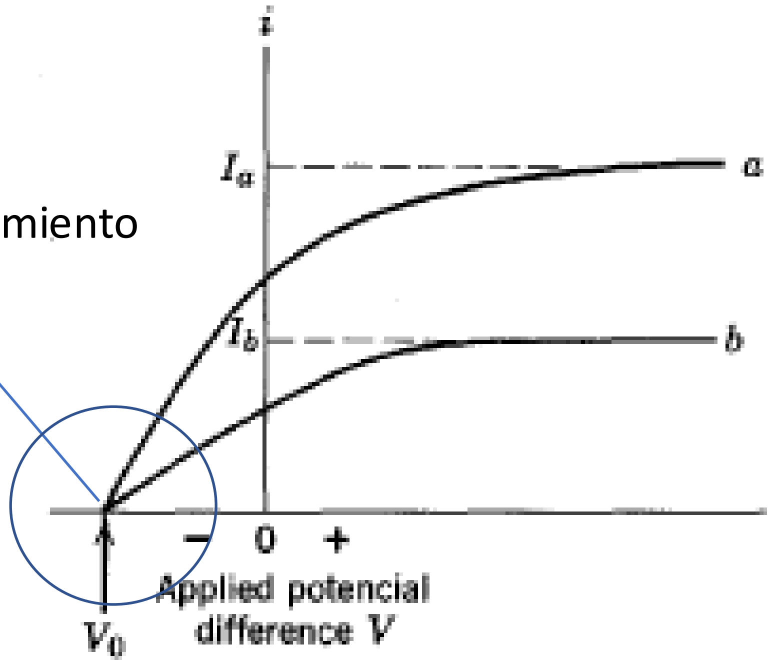
- **Hertz:** descubrió que una descarga eléctrica entre dos electrodos ocurre mas fácilmente cuando incide sobre ellos luz ultravioleta.

- **Lenard:** luz ultravioleta facilita la descarga debido a que ocasiona emisión de electrones desde la superficie del cátodo.

Se liberan electrones (foto e^-) que son atraídos hacia B



Potencial de frenamiento



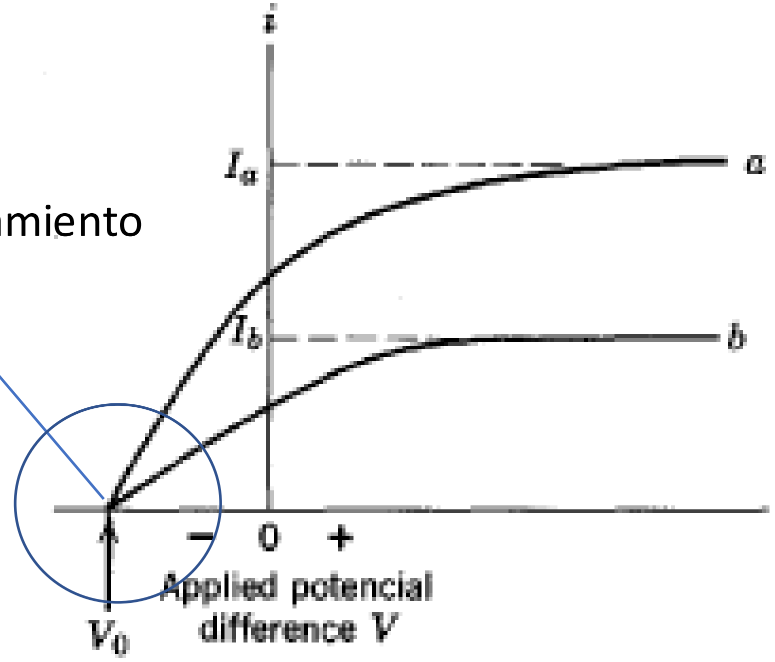
Intensidad de luz mitad
que en a

Se invierte el signo de V y la corriente de foto electrones no cae a cero inmediatamente lo cual sugiere que los electrones emitidos en A tiene energía cinética. Algunos alcanzan a B sin importar el campo eléctrico que se opone a su movimiento.

$$K_{max} = eV_0$$

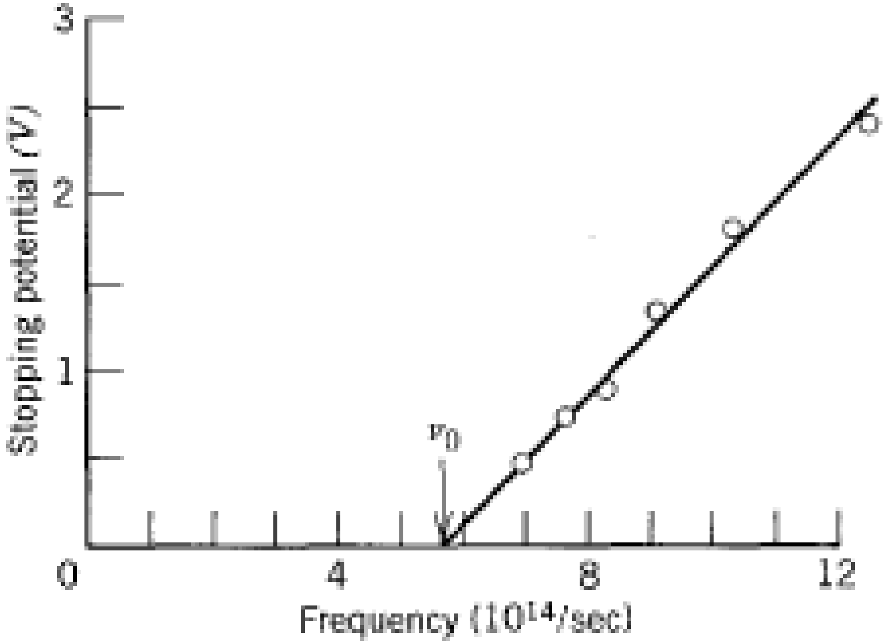
K_{max} es independiente de la intensidad de la luz

Potencial de frenamiento

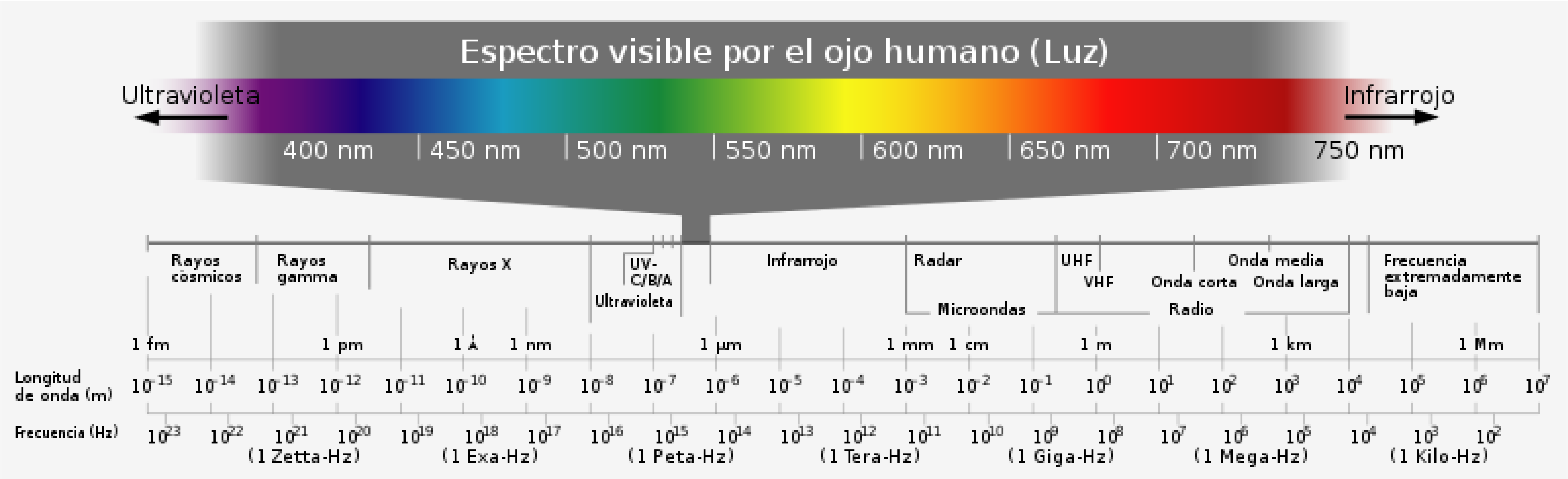


Intensidad de luz mitad
que en a

Experimento hecho
por Millikan en 1914.
Le dieron el novel en
1923 por este experimento.



$$\nu_0 = 4.39 \times 10^{14} hz$$



Espectro visible por el ojo humano (Luz)
Ultravioleta
Infrarrojo
400 nm
450 nm
500 nm
550 nm
600 nm
650 nm
700 nm
750 nm
Rayos cósmicos
Rayos gamma
Rayos X
UV-C/B/A
Ultravioleta
Infrarrojo
Radar
Microondas
UHF
VHF
Onda corta
Onda media
Onda larga
Radio
Frecuencia extremadamente baja
1 fm
1 pm
1 Å
1 nm
1 μm
1 mm
1 cm
1 m
1 km
1 Mm
Longitud de onda (m)
10^{-15} 10^{-14} 10^{-13} 10^{-12} 10^{-11} 10^{-10} 10^{-9} 10^{-8} 10^{-7} 10^{-6} 10^{-5} 10^{-4} 10^{-3} 10^{-2} 10^{-1} 10^{0} 10^{1} 10^{2} 10^{3} 10^{4} 10^{5} 10^{6} 10^{7}
Frecuencia (Hz)
10^{23} 10^{22} 10^{21} 10^{20} 10^{19} 10^{18} 10^{17} 10^{16} 10^{15} 10^{14} 10^{13} 10^{12} 10^{11} 10^{10} 10^{9} 10^{8} 10^{7} 10^{6} 10^{5} 10^{4} 10^{3} 10^{2}
(1 Zetta-Hz)
(1 Exa-Hz)
(1 Peta-Hz)
(1 Tera-Hz)
(1 Giga-Hz)
(1 Mega-Hz)
(1 Kilo-Hz)

¿Qué cosas no se pueden explicar del efecto fotoeléctrico con la teoría clásica de la luz?

1. En la teoría ondulatoria de la luz, el campo eléctrico aumenta con la intensidad de la luz. La fuerza sobre los electrones es:

$$\vec{F} = e\vec{E}$$

Entonces si aumenta la intensidad de la luz aumenta K_{max} pero

$$K_{max} = eV_0$$

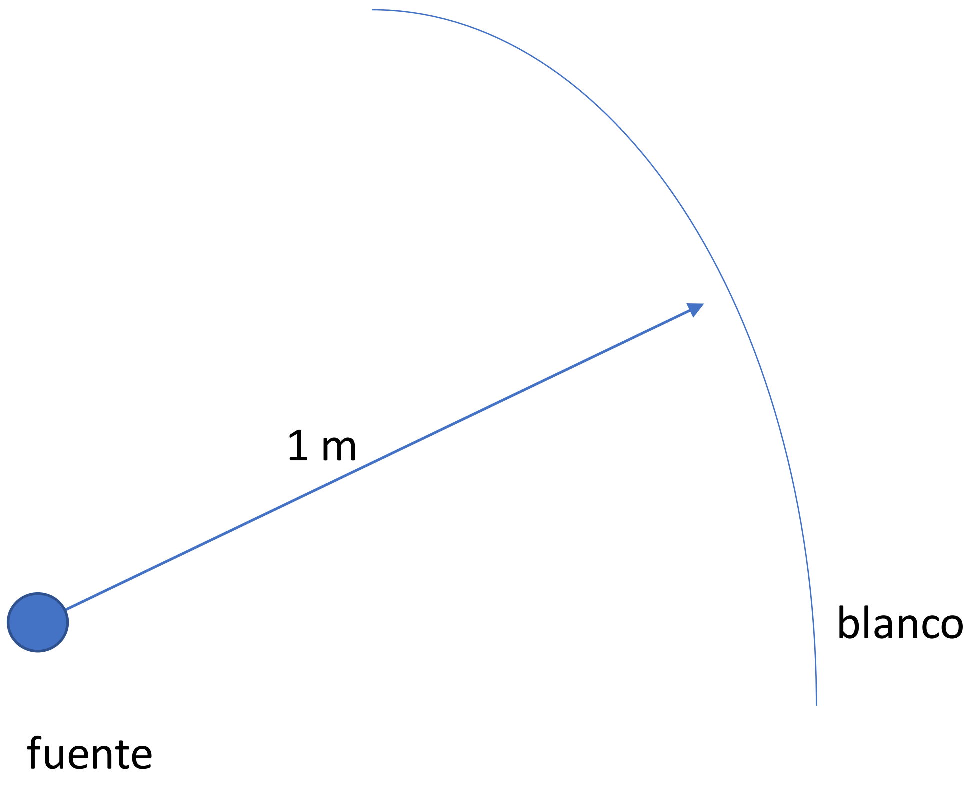
independiente de la intensidad.

2. Según la teoría ondulatoria de la luz el efecto fotoeléctrico debería ocurrir para cualquier frecuencia de la luz tomando encuentra que la intensidad sea suficientemente grande para emitir e^-.

3. Si la energía absorbida por los electrones debería ser proporcional al área de los mismos. En la teoría clásica la energía esta equidistribuida en la onda. Al ser muy chico el blanco, es esperable un *delay* que empieza la absorción y la emisión.

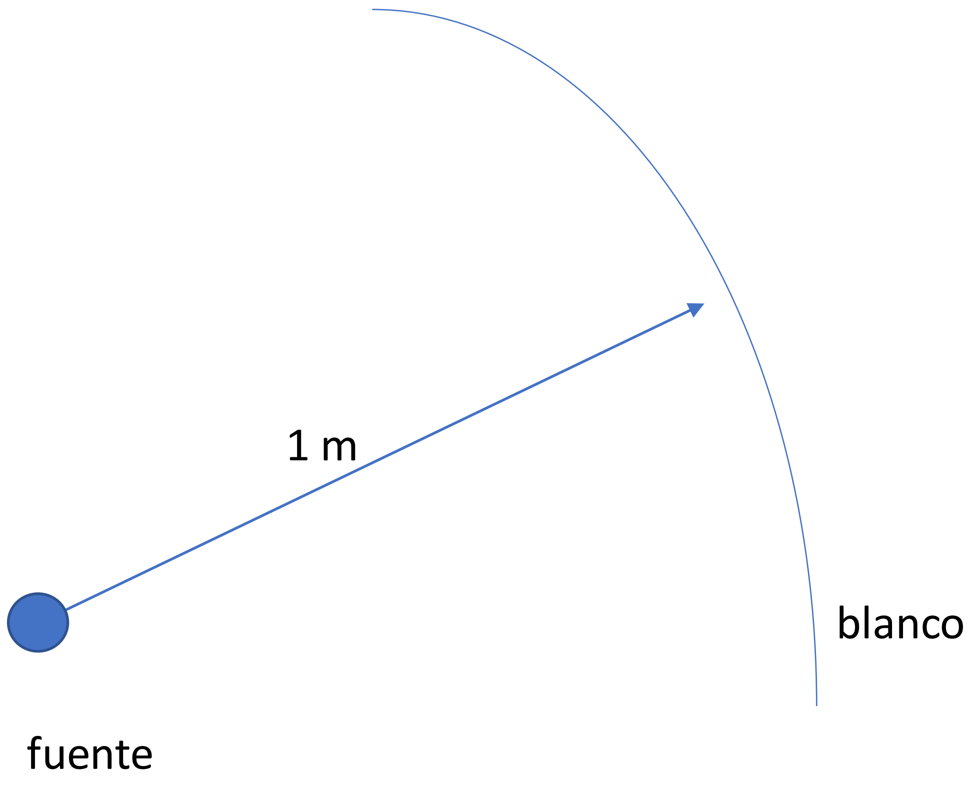
Veamos un ejemplo de esto último….

A una distancia de un metro una fuente lumínica de 1 w se coloca una placa de potasio. Suponga que el foto electrón emitido puede recibir una energía de un área circular de la placa cuyo radio es el radio atómico $1x10^{-10}$ m. La energía necesaria para extraer un e de la superficie del potasio es 3.4×10^{-19} J.



$$A_{blanco} = \pi r^2 = \pi \times 10^{-20} m^2$$

$$1J/s \frac{\pi \times 10^{-20} m^2}{4\pi m^2} = 2.5 \times 10^{-21} j/s$$



$$T = \frac{3.4 \times 10^{-19} j}{2.5 \times 10^{-21} j/s} \approx 2min$$

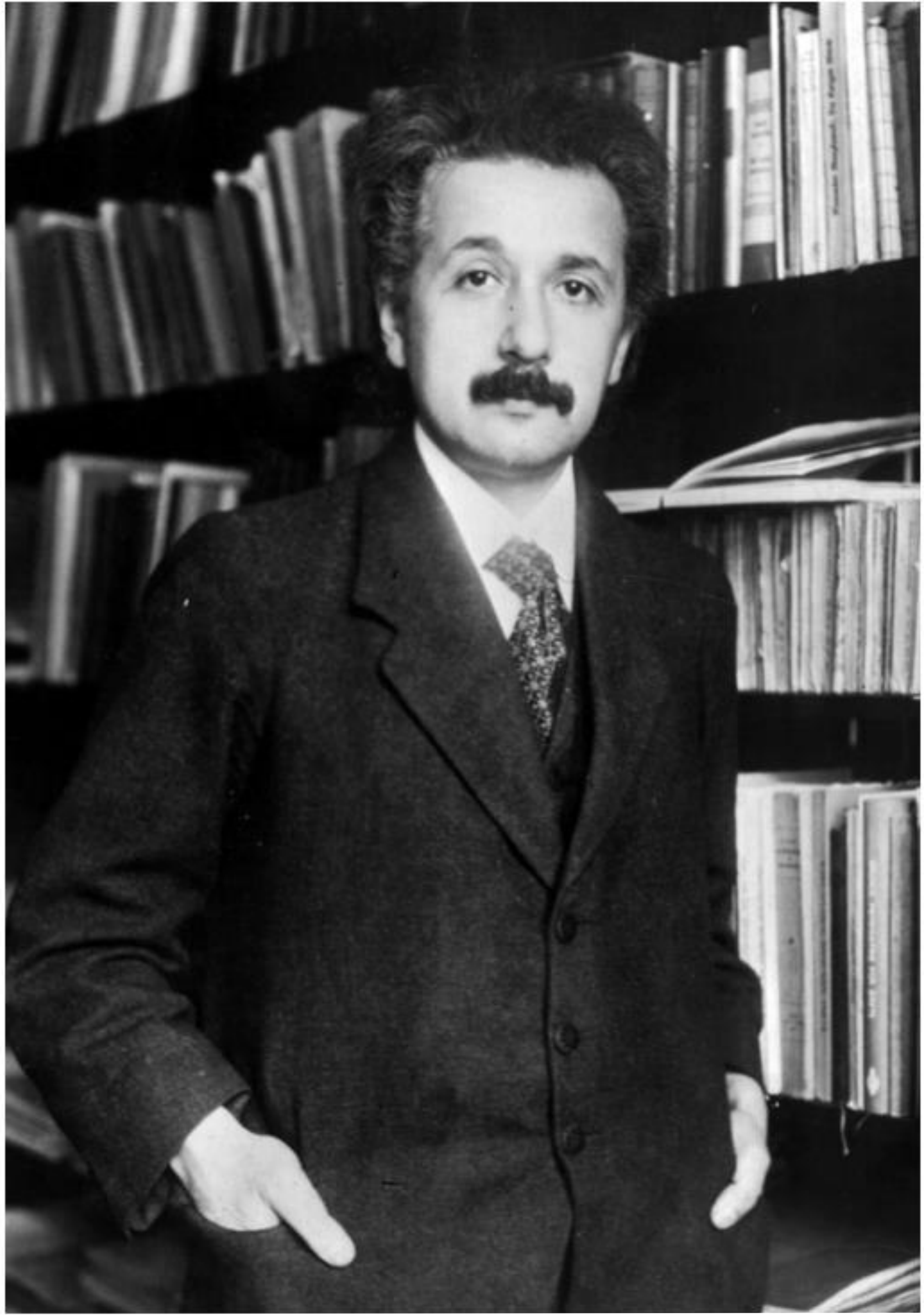
Teoría cuántica del efecto fotoeléctrico


132

6. ***Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt;***
von A. Einstein.

Zwischen den theoretischen Vorstellungen, welche sich die
ysiker über die Gase und andere ponderable Körper ge-
det haben, und der Maxwellschen Theorie der elektro-
gnetischen Prozesse im sogenannten leeren Raume besteht
tiefgreifender formaler Unterschied. Während wir uns
ch den Zustand eines Körpers durch die Lagen und Ge-
digkeiten einer zwar sehr großen, jedoch endlichen An-
on Atomen und Elektronen für vollkommen bestimmt
bedienen wir uns zur Bestimmung des elektromagne-
ustandes eines Raumes kontinuierlicher räumlicher
, so daß also eine endliche Anzahl von Größen
nügend anzusehen ist zur vollständigen Festlegung
agnetischen Zustandes eines Raumes. Nach der
n Theorie ist bei allen rein elektromagnetischen
, also auch beim Licht, die Energie als konti-
umfunktion aufzufassen, während die Energie
eln Körpers nach der gegenwärtigen Auffassung
ls eine über die Atome und Elektronen er-
darzustellen ist. Die Energie eines ponderabeln
icht in beliebig viele, beliebig kleine Teile zer-
sich die Energie eines von einer punktförmigen
gesandten Lichtstrahles nach der Maxwell-
der allgemeiner nach jeder Undulationstheorie)
ein stets wachsendes Volumen sich kontinuier-

tinuierlichen Raumfunktionen operierende Un-
des Lichtes hat sich zur Darstellung der rein
nene vortrefflich bewährt und wird wohl nie
Theorie ersetzt werden. Es ist jedoch im
daß sich die optischen Beobachtungen auf
, nicht aber auf Momentanwerte beziehen,
vollständigen Bestätigung der Theorie der
Brechung, Dispersion etc. durch das



Teoría cuántica del efecto fotoeléctrico

Einstein (1905): energía radiante esta cuantizada en paquetes concentrados (fotones):

$$\boxed{E = h\nu}$$

(Energía de los fotones)

$$\boxed{K = h\nu - w}$$

Trabajo para sacar un electrón del material

Energía del fotón absorbido

$$K_{max} = h\nu - w_0$$

Función trabajo: mínima energía para que un electrón salga del material

Veamos como esta teoría encara las tres objeciones de la teoría ondulatoria sobre el efecto fotoeléctrico:

1. Falla de concordancia de Kmax con la intensidad de la luz va perfecto con:

$$K_{max} = h\nu - w_0$$

2. Existe una frecuencia de corte: Kmax=0

$$0 = h\nu_0 - w_0 \quad \Rightarrow \quad h\nu_0 = w_0$$

$$eV_0 = K_{max} = h\nu - w_0 \qquad V_0 = h\nu/e - w_0/e$$

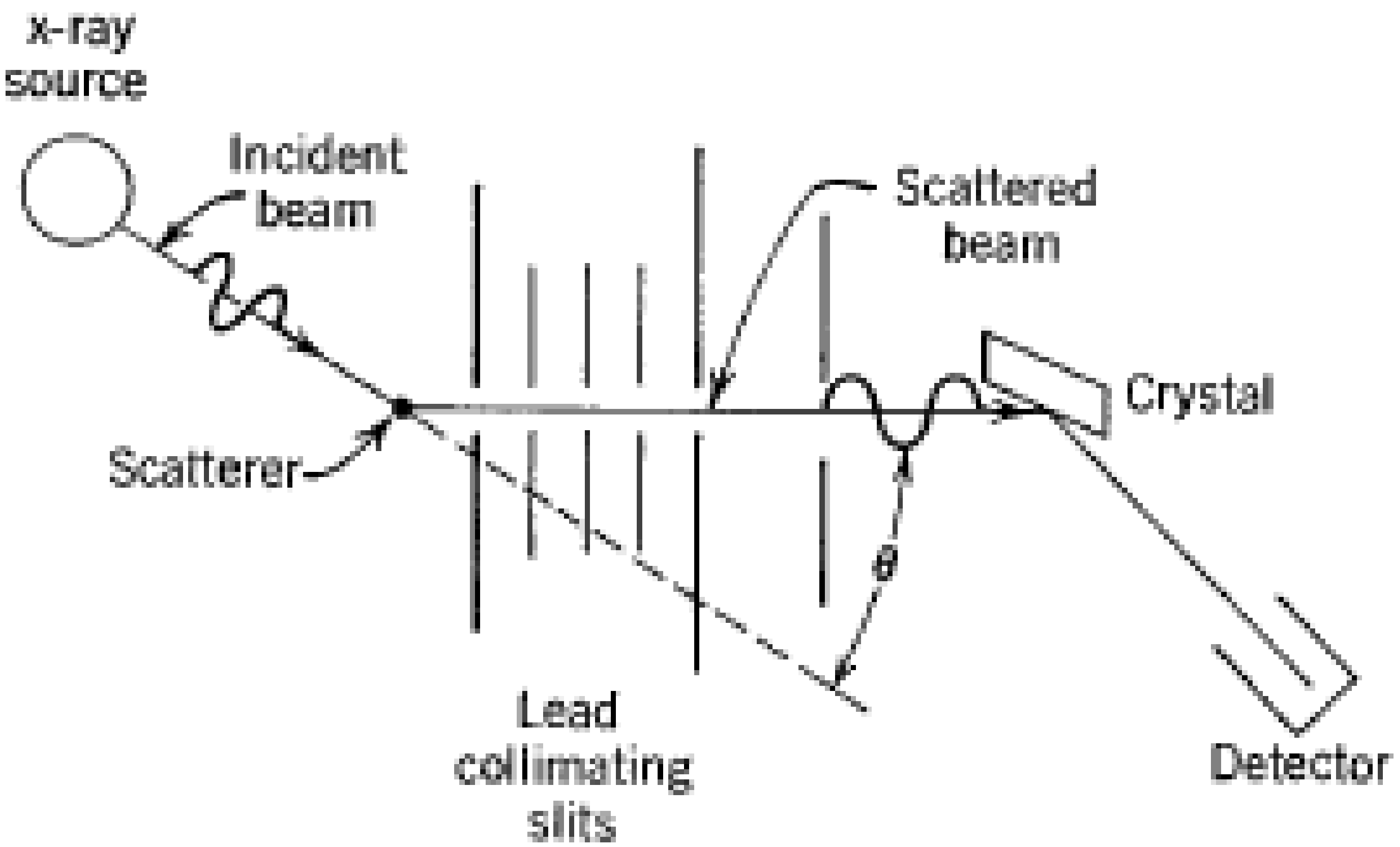
3. La energía esta concentrada en paquetes y no en toda la onda esférica.

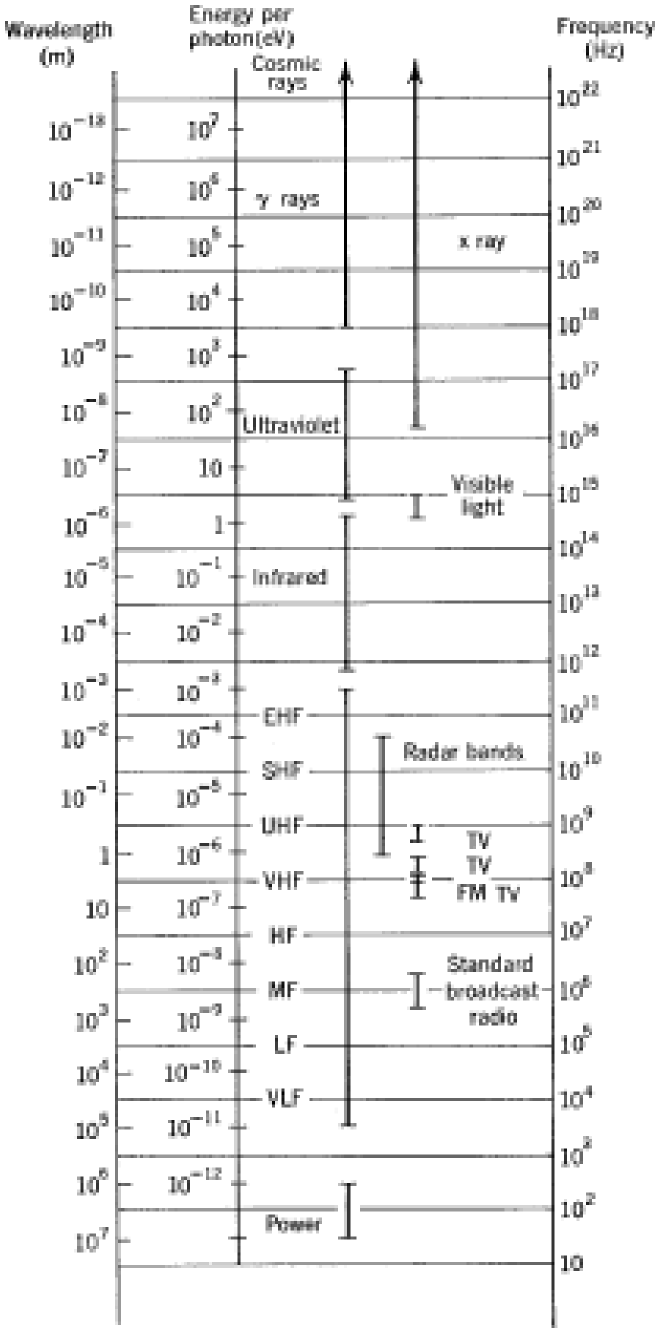
¿Tiene usos el efecto fotoeléctrico?

- Paneles solares
- Fotocélulas: detectores de luz
- Fotomultiplicadores: instrumentos de medición de luz muy sensibles

Hacia la Mecánica Cuántica

Efecto Comptom (1923)


x-ray
source
Incident
beam
Scattered
beam
Crystal
Scatterer
θ
Lead
collimating
slits
Detector



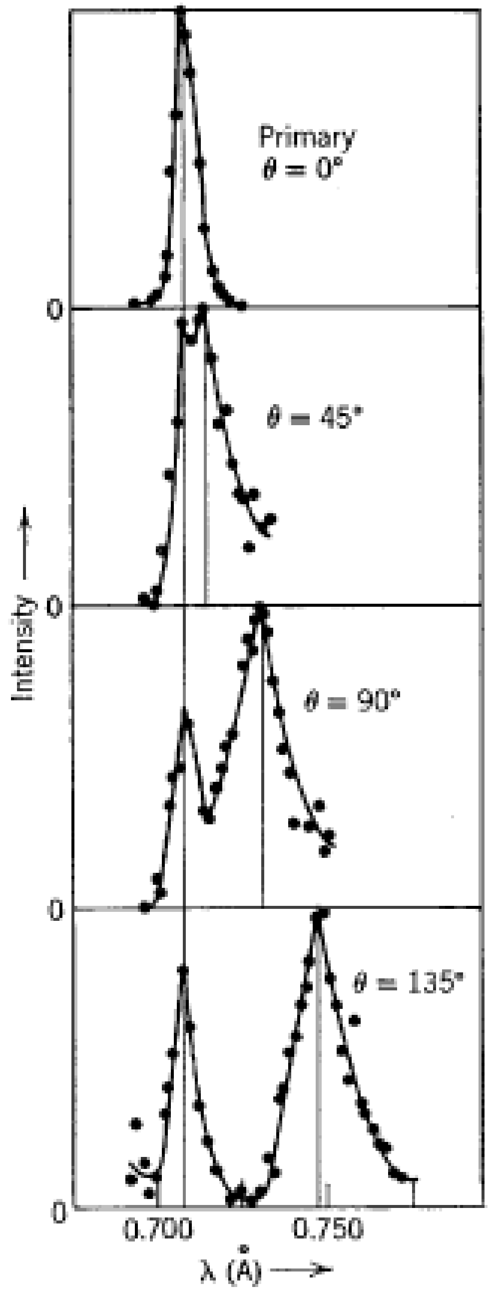
Wavelength (m)
Energy per photon (eV)
Frequency (Hz)
Cosmic rays
γ rays
x ray
Ultraviolet
Visible light
Infrared
EHF
SHF
UHF
VHF
HF
MF
LF
VLF
Radar bands
TV
TV
FM
TV
Standard broadcast radio
Power

El haz incidente es de una sola longitud de onda λ, sin embargo el haz dispersado tiene dos picos, o sea dos longitudes de onda:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$$

Corrimiento de Comptom

Depende de θ



¿Como explico Compton estos resultados?

El fotón le transfiere cierta cantidad de energía a los electrones por lo cual los fotones dispersados tienen una energía menor $E'=h\nu'$ o sea ν' es menor entonces $\lambda'=c/\nu'$

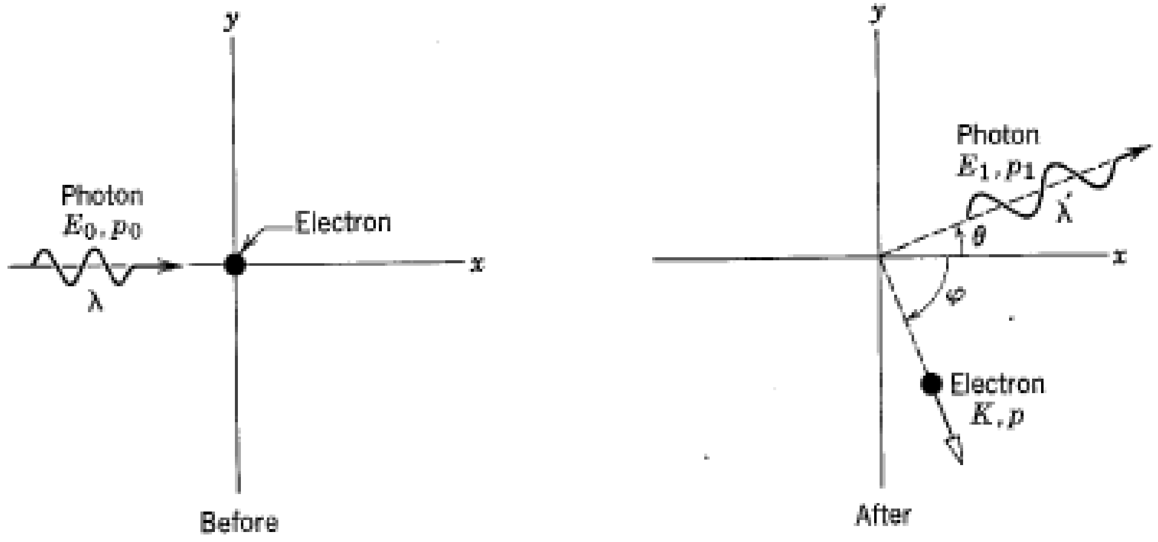
El fotón es relativista entonces:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$E^2 = c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2$$

$$m_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad E = cp$$

$$p = E/c = h\nu/c = h/\lambda$$



x) $p_0 = p_1 \cos\theta + p\cos\varphi$

y) $p_1 \sin\theta = p\sin\varphi$

$$(p_0 - p_1\cos\theta)^2 = p^2\cos^2\varphi$$

$$p_1^2\sin^2\theta = p^2\sin^2\varphi$$

$$p_0^2 + p_1^2 - 2p_0p_1\cos\theta = p^2$$

$$E_0 + m_0c^2 = E_1 + K + m_0c^2$$ Conservación de la energía

$$E_0 - E_1 = K$$

$$c(p_0 - p_1) = K$$

$$E^2 = c^2p^2 + (m_0c^2)^2$$

$$(K + m_0c^2)^2 = c^2p^2 + (m_0c^2)^2$$

$$K^2 + 2Km_0c^2 = c^2p^2$$

$$K^2/c^2 + 2Km_0 = p^2$$

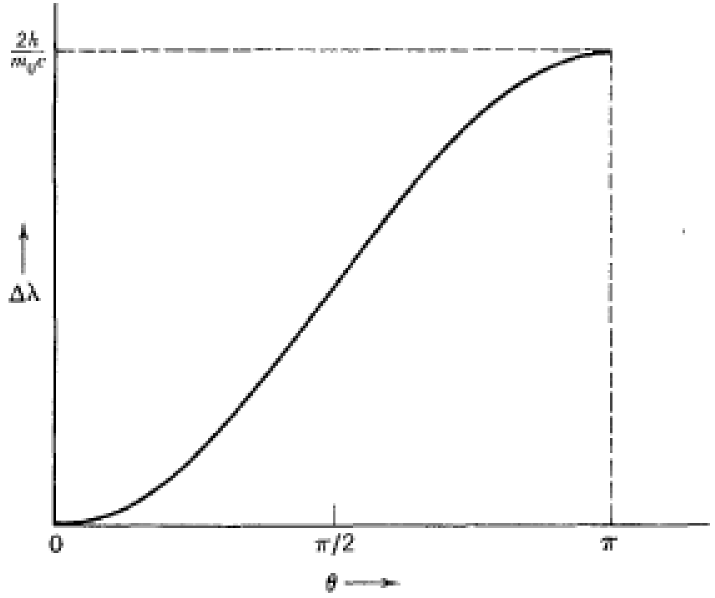
$$(p_0 - p_1)^2 + 2m_0c(p_0 - p_1) = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0p_1 \cos\theta$$

$$m_0c(p_0 - p_1) = p_0p_1(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} = \frac{1}{m_0c}(1 - \cos\theta)$$

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_C(1 - \cos\theta)}$$

$$\lambda_C \equiv h/m_0c = 2.43 \times 10^{-12}\ \text{m} = 0.0243\ \text{Å}$$



$\frac{2h}{m_0 c}$
$\Delta\lambda$
0
$\pi/2$
π
θ

¿ Como se explica la existencia de un pico en λ?

Si considero que los electrones no están libre, podemos pensar que el foton choca con todo el atomo cuya masa es 22000 veces mayor que m_0 (para los átomos de carbono).

$$\Rightarrow \quad \Delta\lambda = 0$$