ONDAS

posición, velocidad
campo E, campo B,

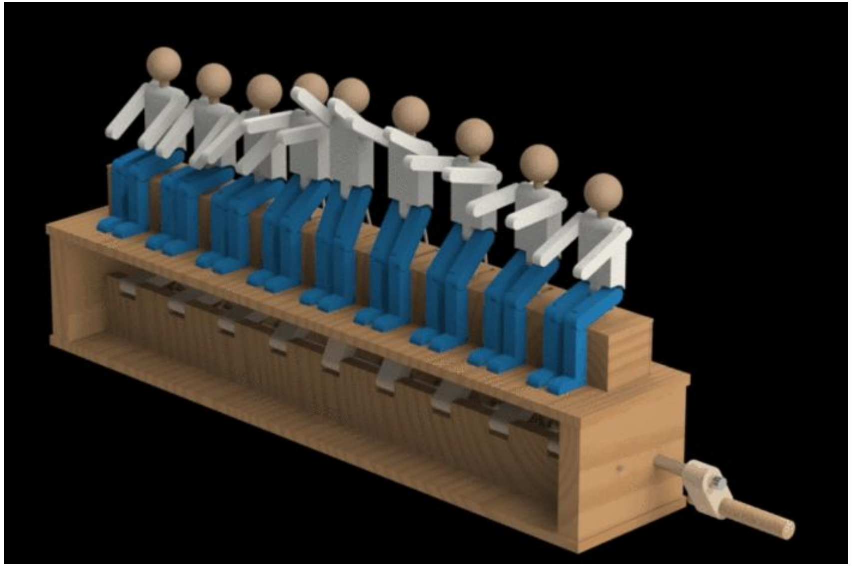
presión
densidad

Una primera definición: **Una $\boxed{\textbf{perturbación}}$ que se propaga**

Se mide con respecto de una
posición de referencia (equilibrio)

Mejoramos la definición: **no hay transporte neto de materia**

Onda: **propagación de una perturbación, con transporte de energía pero sin transporte de materia**

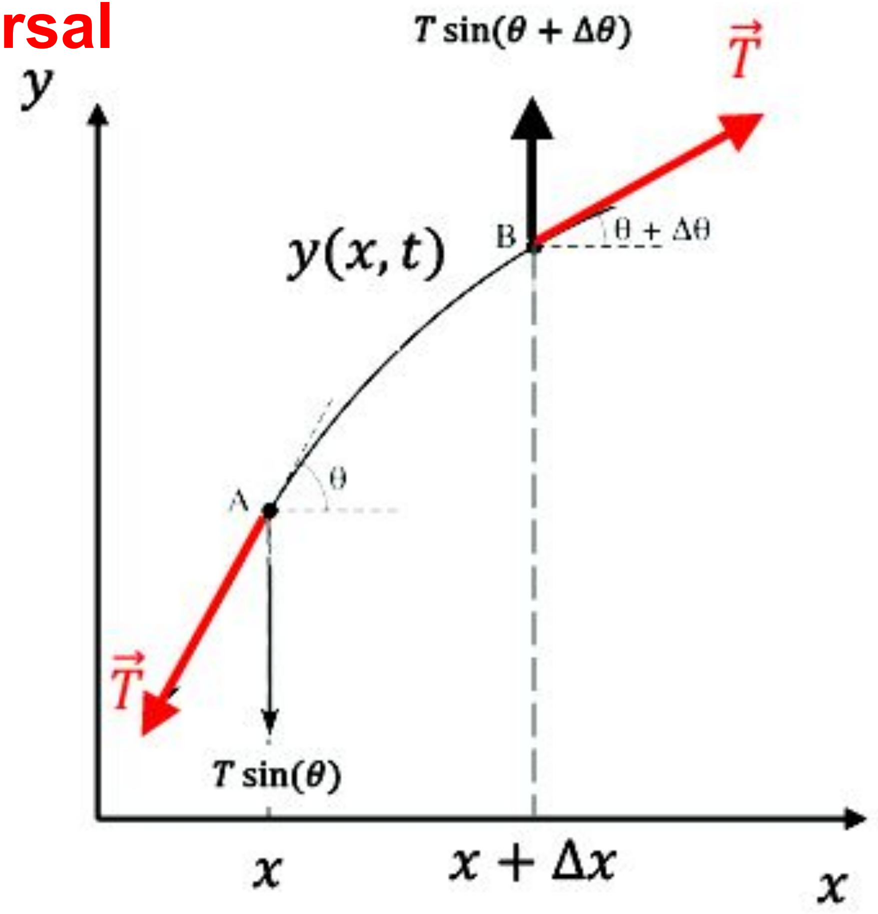


Ondas mecánicas transversales: una cuerda

https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_all.html?locale=es

Cuerda con oscilación transversal

- Cuerda de densidad de masa μ por unidad de distancia.
- Sometida a una tensión $\vec{T}$
- $\vec{T}$ es tangente a la forma de la cuerda
- Forma de la cuerda en un instante dado es $y(x)$
- Inextensible (el módulo de la tensión T es el mismo en toda la cuerda).
- Consideremos un tramo de la cuerda entre los puntos A y B (entre x y $x + \Delta x$).

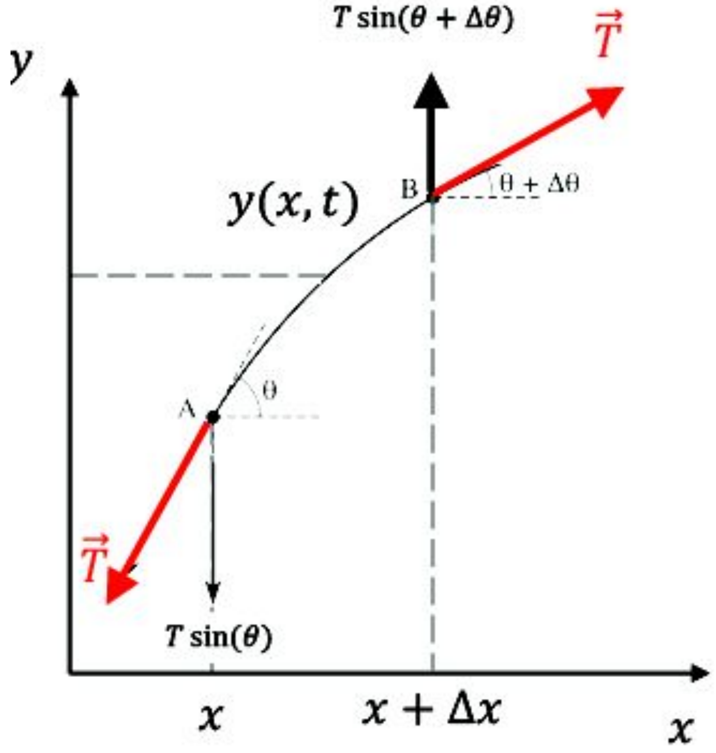


- Consideremos ahora movimiento en la componente y.

$$F_y = -T\sin\theta + T\sin(\theta + \Delta\theta)$$

- Si llamamos ΔL al largo del segmento, por segunda ley de Newton tenemos:

$$\mu\,\Delta L\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T\sin\theta + T\sin(\theta + \Delta\theta)$$



- Para pequeños apartamientos (Δy y θ pequeños)

$$\Delta L \cong \Delta x$$
$$\sin\theta \cong \tan\theta \cong \theta$$

- Entonces

$$\mu\,\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T\theta + T(\theta + \Delta\theta) = T\Delta\theta$$

- Hagamos ahora tender $\Delta x \to 0$

$$\tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

- Derivando respecto a x tenemos

$$\frac{\partial \tan\theta}{\partial x} = \frac{1}{(\cos\theta)^2}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Para $\theta \cong 0$, $(\cos\theta)^2 \cong 1$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\mu \, \Delta L \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T \sin\theta + T \sin(\theta + \Delta\theta)$$

- Entonces, retomando, tenemos

$$\mu \, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T d\theta$$

- Dividido por dx (que no nos vea unx matemáticx)

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

- y reemplazo $\frac{\partial \theta}{\partial x}$:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- Tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- $\sqrt{\frac{\mu}{T}}$ tiene unidades de inversa de la velocidad, entonces, tomando una velocidad v tal que

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Ecuación de Onda

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

La ecuación de onda y su solución

- La ecuación de onda

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- Tiene como solución cualquier función $y = f(x,t)$ del tipo

$$y(x,t) = f(x,t) = f(x \pm vt)$$

- Como es **lineal**, una combinación lineal de soluciones también es una solución.

Definiciones: velocidad de fase

- En la ecuación de onda, v es la velocidad a la que cambia el argumento de f (lo que está entre paréntesis) es decir, la fase de la oscilación.

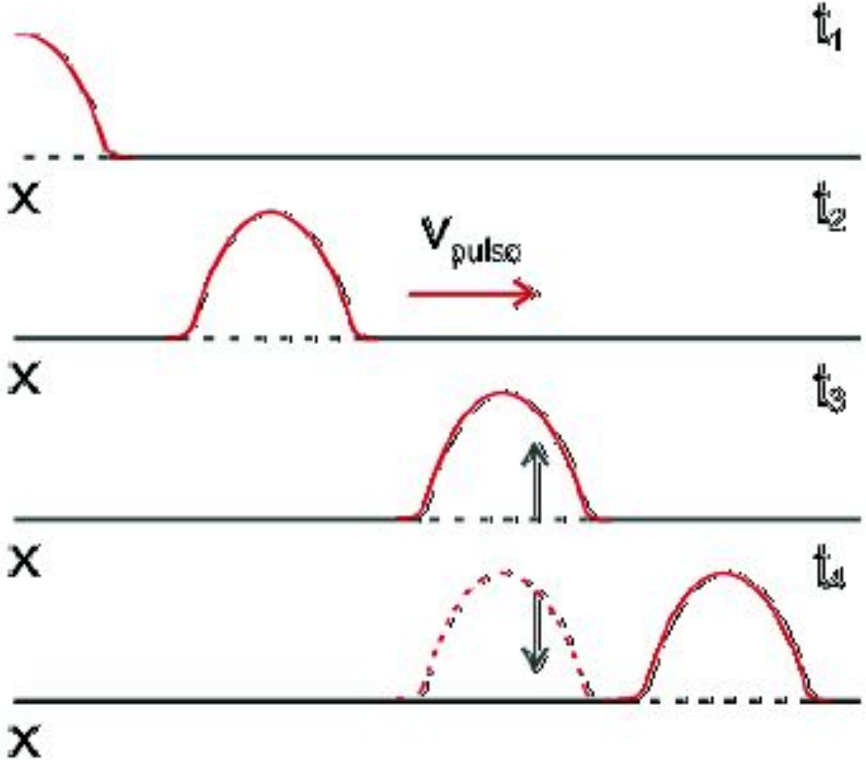
- Se denomina velocidad de fase.

- Tanto $+v$ como $-v$ son válidas en la ecuación de onda

- En el caso de la cuerda, reemplazar $f(x \pm vt)$ en la ecuación de onda nos da:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Signos de *v* en un pulso *f(x ± vt)*



Si $v > 0$

$$\boxed{y = f(x \pm vt)}$$

$-$ → propagación de izda a dcha

$+$ ← propagación de dcha a izda

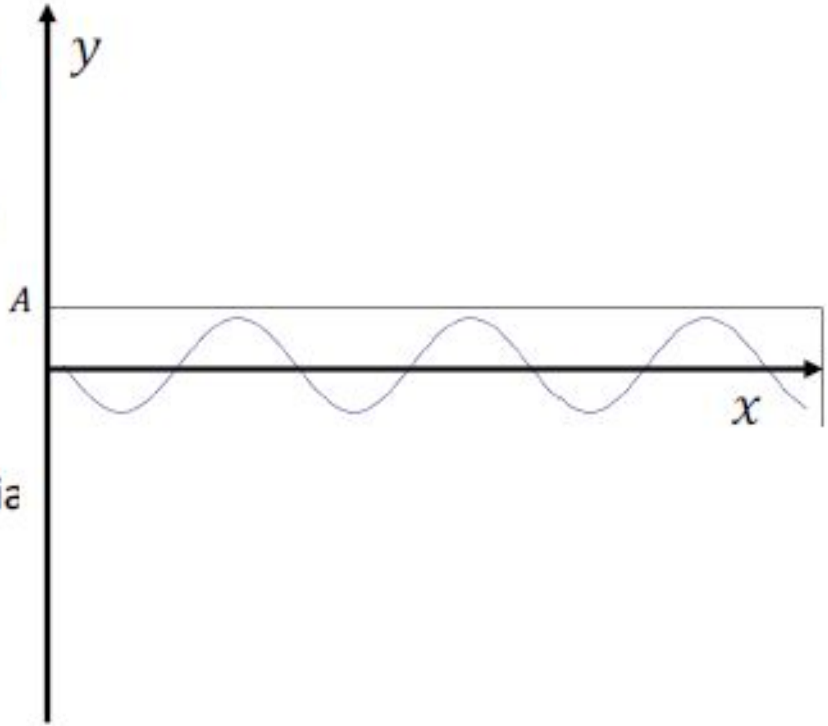
- Una de las soluciones de la ecuación de onda es la función:

$$f(x,t) = A\ \cos(kx - \omega t)$$

- Moviendo el extremo de la cuerda de arriba hacia abajo con una frecuencia angular ω la puedo generar (también le doy amplitud A)

- Viaja hacia la derecha con velocidad

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$



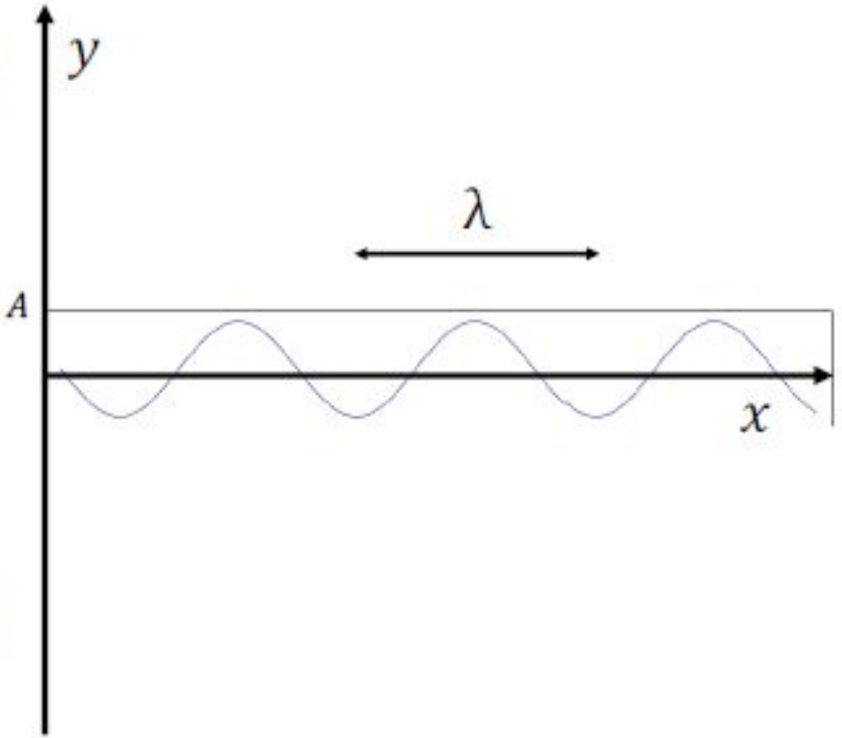
- Si sacamos una foto de la cuerda a un instante dado t_0, la forma de la onda es:

$$f(x, t_0) = A\ \cos(kx - \omega t_0)$$

- Es fácil ver que esta forma se repite cada distancia λ tal que

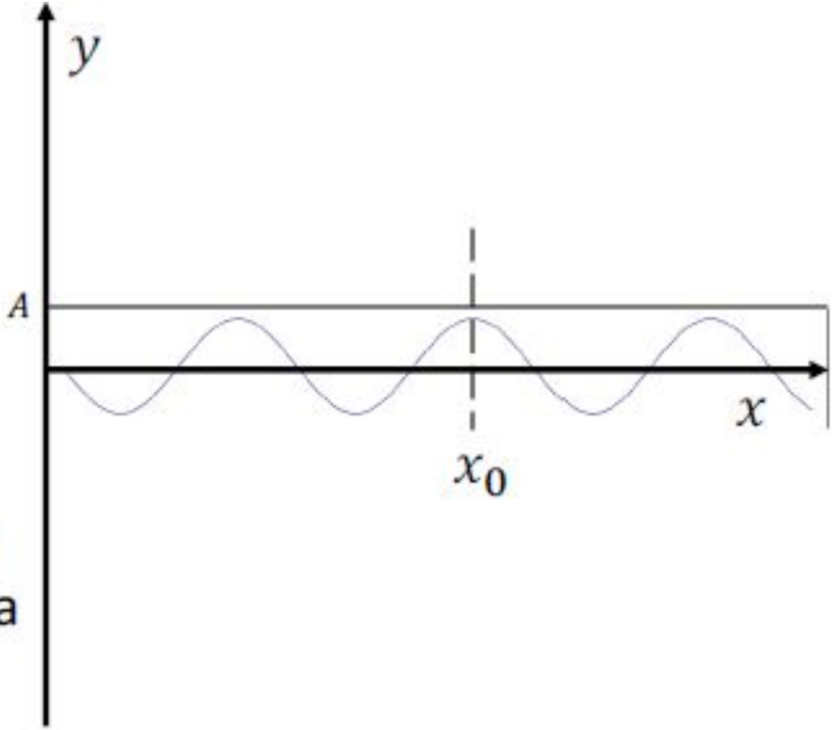
$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

- A λ se la denomina longitud de onda y k se denomina numero de onda



- Si ahora nos paramos a una distancia x_0

$$f(x_0, t) = A\ \cos(kx_0 - \omega t)$$



- Vemos el punto d ela cuerda subir y bajar con frecuencia ω. La oscilación se vuelve a repetir al cabo de un período τ tal que

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

- Es facil ver reemplazando en la ecuación o sacando factor común k que

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\omega}{k}$$

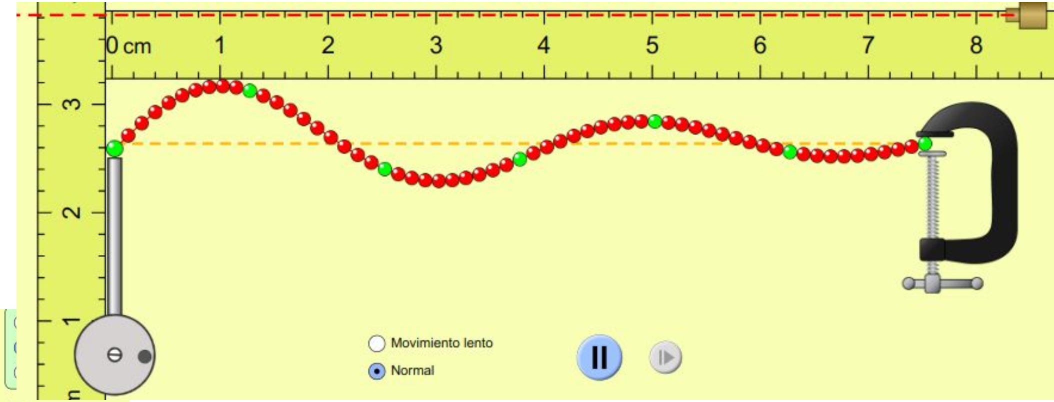
⬅ Ecuación de dispersión de la onda

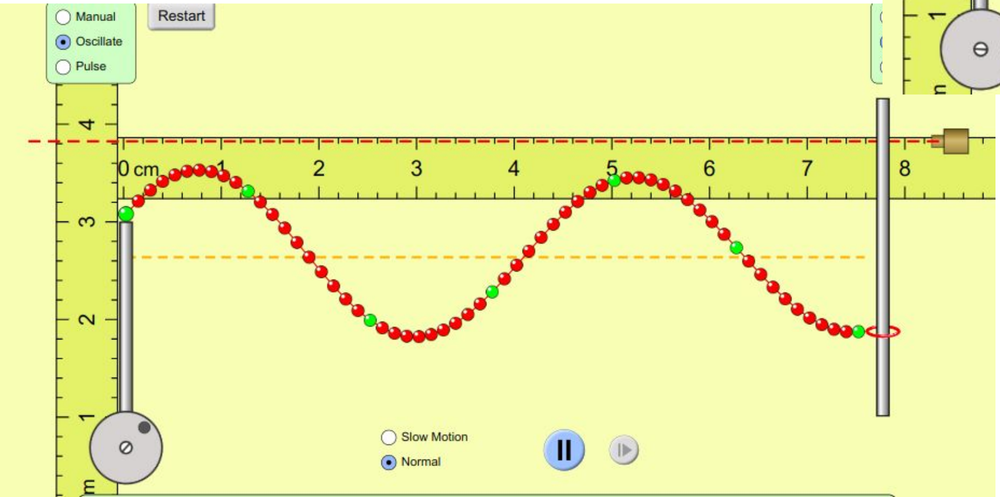
- En este caso, v no depende de ω ni de k y estas se acomodan de manera de siempre cumplir con la ec. de dispersión.

Si v es constante entonces la onda es NO DISPERSIVA

¿Qué papel juegan las condiciones de contorno?

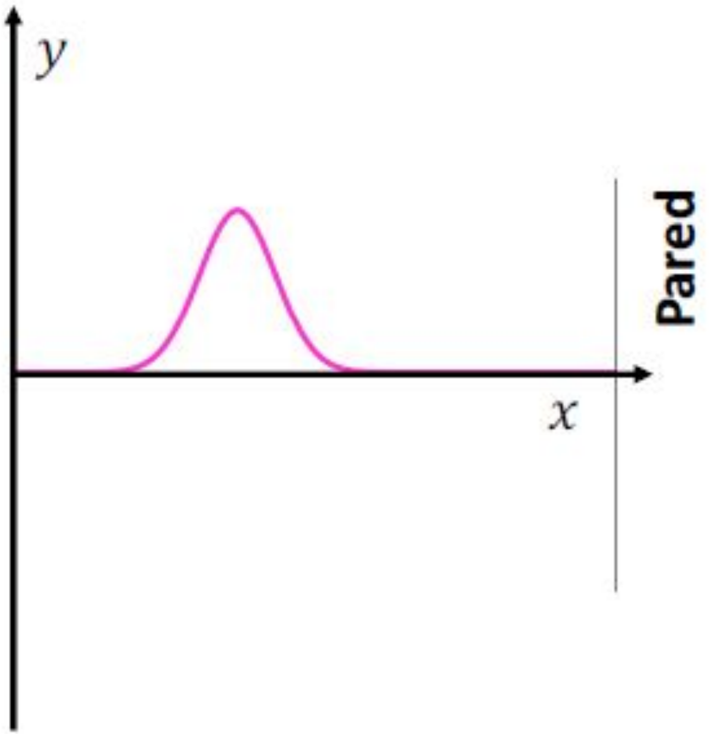
https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_all.html





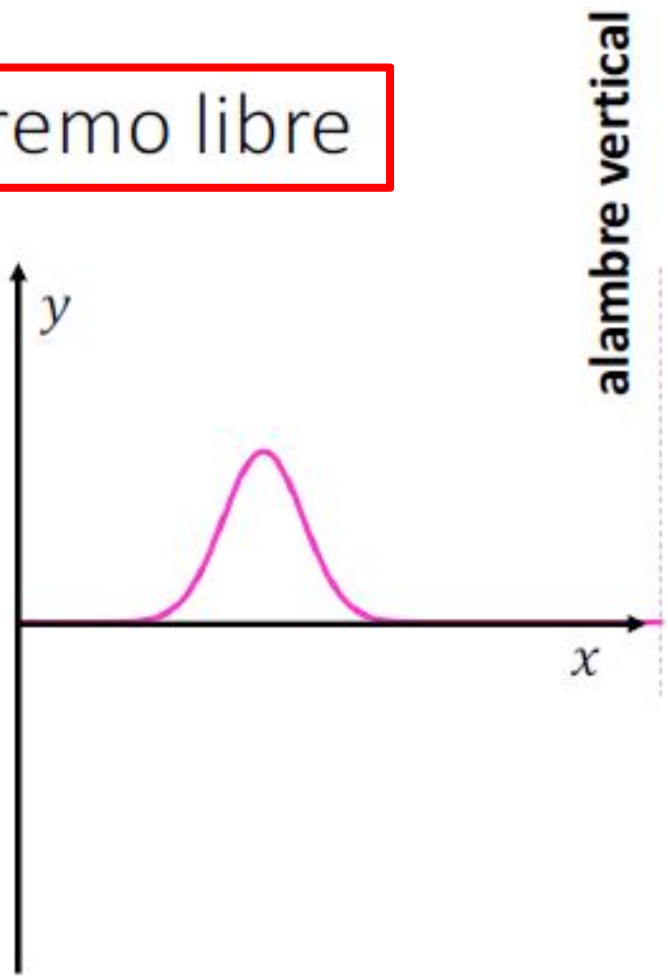
Condiciones de contorno: extremo fijo

- Experimento: Fijamos un extremo de la cuerda de una pared (condición de extremo fijo).
- Esto quiere decir que en la pared, siempre:
  - $y = constante$,
  - En particular $y = 0$
- Notamos que pulso se 'refleja' y vuelve con la amplitud invertida.
- La pared genera un pulso igual pero opuesto en amplitud y velocidad de modo que $y = 0$ en la pared siempre.



Condiciones de contorno: extremo libre

- Experimento: En un extremo ponemos un anillo angarzado a un alambre vertical sin rozamiento (condición de extremo libre).
- Esto quiere decir que en ese extremo:
$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$
- Notamos que pulso se 'refleja' y vuelve con la amplitud sin invertir.
- El alambre genera un pulso igual pero opuesto en velocidad de modo que $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ en ese extremo.



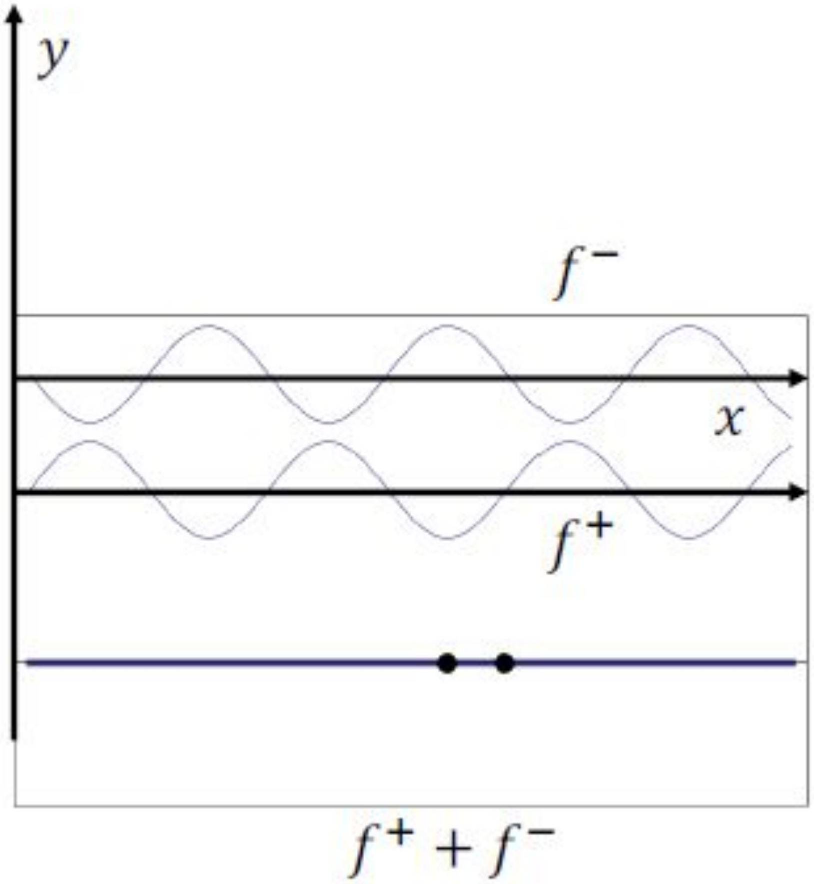
Ondas Estacionarias

- Vimos que la ecuación de onda admitía soluciones viajeras en ambos sentidos de propagación.

- Supongamos entonces dos ondas

$$f^{\pm}(x,t) = A\sin(kx \pm \omega t)$$

- La suma de ambas es también una solución



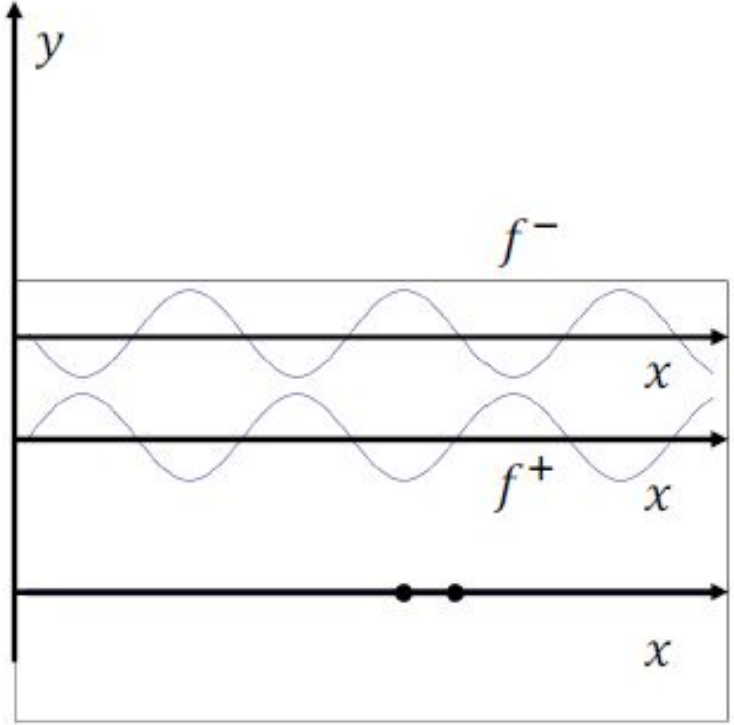
- Sumemos $f^+ + f^-$

$$A(\sin(kx+\omega t)+\sin(kx-\omega t)) =$$
$$A(\sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t$$
$$+ \sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t) =$$

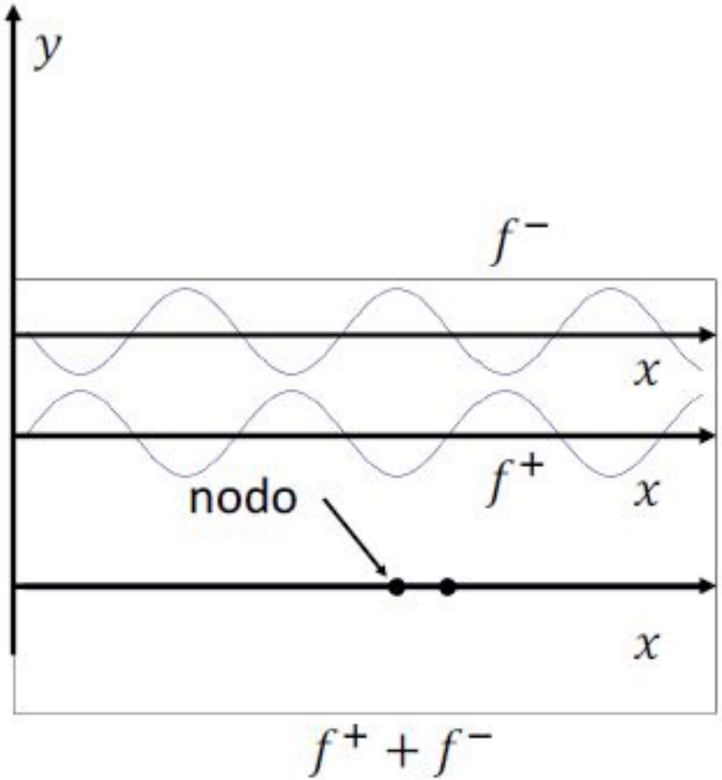
- El resultado da una onda estacionaria

$$f^+ + f^- = 2A \sin kx \cos \omega t$$

Parte espacial Parte temporal



$f^+ + f^-$



- Los nodos son los lugares donde la onda siempre es cero.
- Estos son los valores de x_n tales que:

$$\sin kx_n = 0$$

- Esto equivale a que para un n natural o cero

$$kx_n = n\pi$$

- O bien

$$x_n = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\lambda}{2}$$

Condiciones de contorno → Reflexión

Una onda sinusoidal en una cuerda de largo L con condiciones de contorno en los extremos tendrá soluciones

ONDAS ESTACIONARIAS

La pregunta deja de ser por el **origen** de la onda y se transforma en una pregunta por **cómo oscila** (modos)

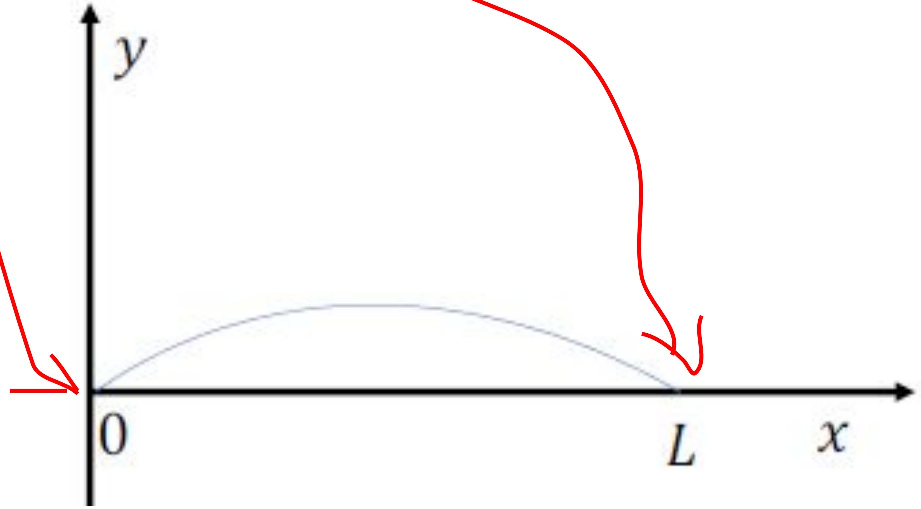
- Las **condiciones de contorno** son:

Condición 1: $y(0,t) = 0$

Condición 2: $y(L,t) = 0$

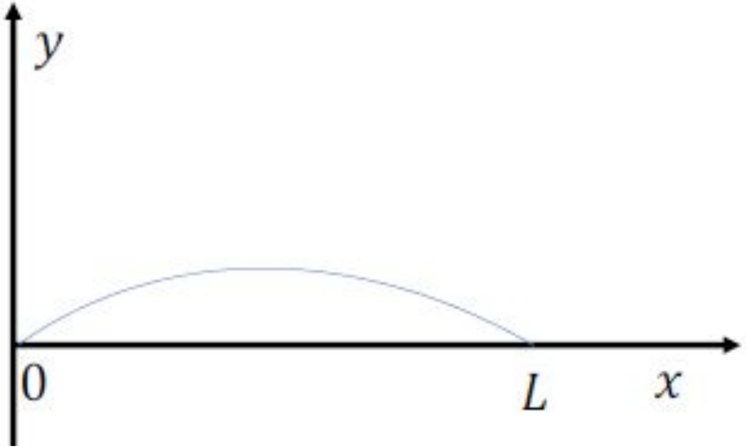
- Estas condiciones van a hacer que la solución estacionaria tenga **nodos en lugares bien específicos.**

Caso 1: Cuerda de largo L con extremos fijos



- Tomemos una solución de tipo estacionaria:

$$y_n(x,t) = A_n \sin k_n x \cos \omega_n t$$



- La condición 1 se satisface automáticamente pues:

$$y_n(0,t) = A_n \sin k_n 0 \cos \omega_n t = 0$$

- La condición 2 pide que:

$$\sin k_n L = 0$$

para n natural

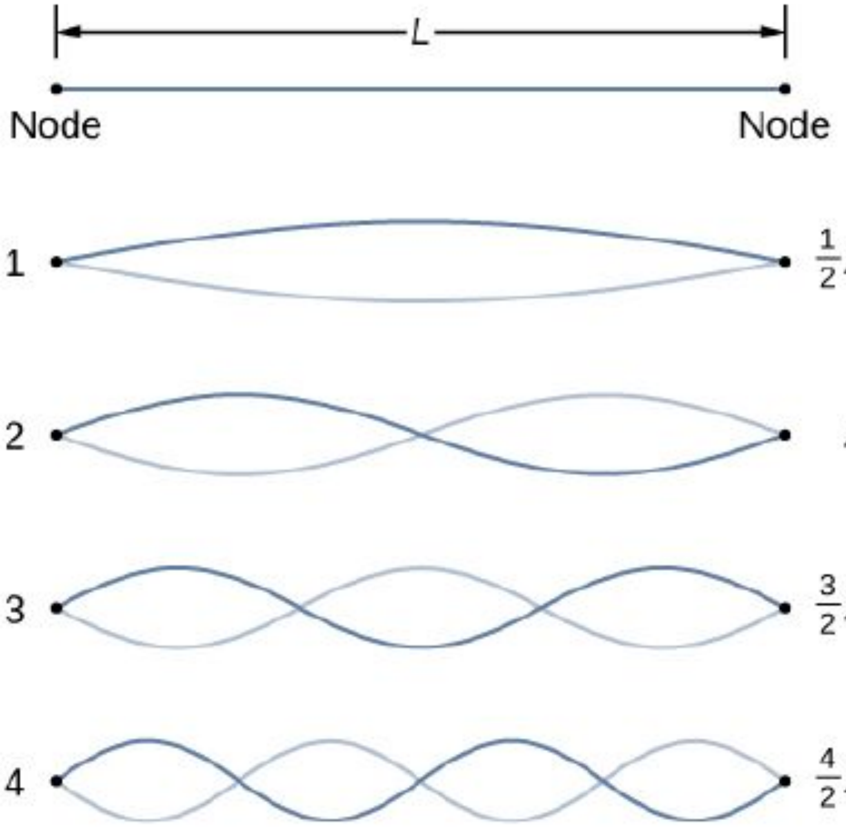
$$k_n L = n\pi$$

luego

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

o

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$$



Modo fundamental o primer armónico $n = 1$ $\frac{1}{2}\lambda_1 = L$ $\lambda_1 = \frac{2}{1}L$

segundo armónico $n = 2$ $\lambda_2 = L$ $\lambda_2 = \frac{2}{2}L$

tercer armónico $n = 3$ $\frac{3}{2}\lambda_3 = L$ $\lambda_3 = \frac{2}{3}L$

cuarto armónico $n = 4$ $\frac{4}{2}\lambda_4 = L$ $\lambda_4 = \frac{2}{4}L$

Estos son los modos naturales de oscilación de una cuerda de largo L

$$\lambda_n = \frac{2}{n}L \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

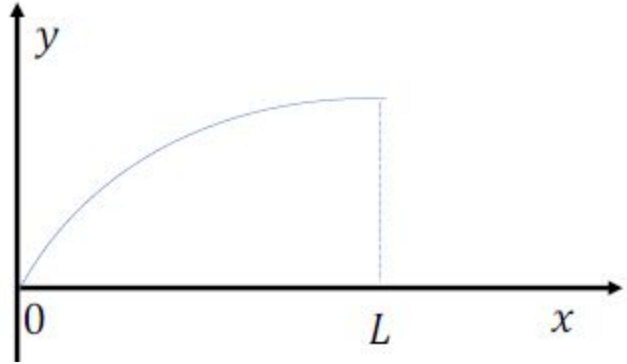
Todas son soluciones ⇒ la solución general es:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x \cos \omega_n t$$

Suma de las soluciones
para cada valor de *n*

donde $k_n = \frac{n\pi}{L}$ y $\omega_n = v k_n = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{n\pi}{L}$

Caso 2: Cuerda de largo L con 1 extremos fijo y otro libre



- Las condiciones de contorno son:

Condición 1: $y(0,t) = 0$

Condición 2: $\frac{dy}{dx}(L,t) = 0$

- Tomemos una nuevamente una solución de tipo estacionaria:

$$y_n(x,t) = A_n \sin k_n x \cos \omega_n t$$

- La condición 1 se satisface automáticamente pues:

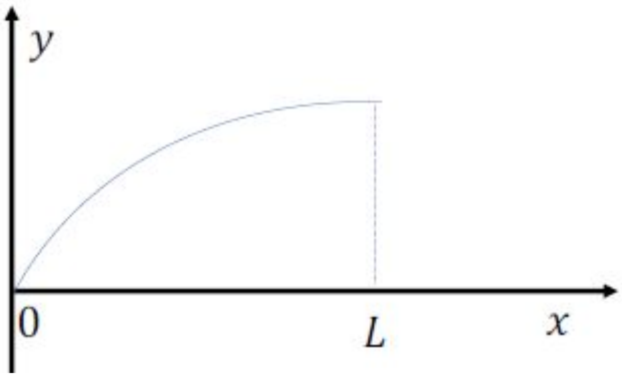
$$y_n(0,t) = A_n \sin k_n 0 \cos \omega_n t = 0$$

- La condición 2 pide que:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(L,t) = k_n A_n \cos k_n L \cos \omega_n t = 0$$

- Es decir

$$\cos k_n L = 0$$

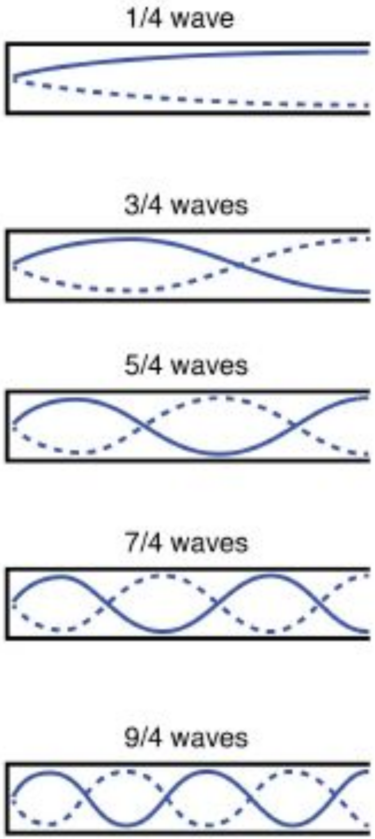


- Esto implica que, para $n = 0, 1, 2, 3\ \ldots$

$$k_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi(2n+1)}{2}$$

luego

$$k_n = \frac{\pi(2n+1)}{2L}$$



n	$\lambda_n = \frac{4L}{(2n+1)}$
0	$\lambda_0 = 4L$
1	$\lambda_1 = \frac{4L}{3}$
2	$\lambda_2 = \frac{4L}{5}$
3	$\lambda_3 = \frac{4L}{7}$
4	$\lambda_4 = \frac{4L}{9}$

Todas son soluciones ⇒ la solución general es:

$$y(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin k_n x \cos \omega_n t$$

Suma de las soluciones
para cada valor de *n*

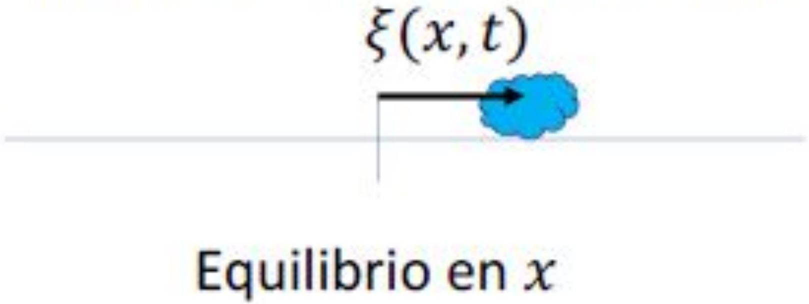
$$k_n = \frac{\pi(2n+1)}{2L} \text{ y } \omega_n = v k_n = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{\pi(2n+1)}{2L}$$

Ondas Longitudinales

https://www.youtube.com/watch?v=7cDAYFTXq3E&ab_channel=AnimationsforPhysicsandAstronomy

Ejemplo: Ondas Sonoras

- Son ondas en las que las moléculas de aire se mueven alrededor de una posición de equilibrio. Para cada posición de equilibrio x la posición $\xi(x,t)$ de una parcela de aire va a oscilar en el tiempo:



- Son longitudinales porque la onda se propaga en la misma dirección que la coordenada $\boxed{\xi(x,t)}$

Apartamiento de la posición de equilibrio

- Entonces $\xi(x,t)$ cumple la ecuación de onda para apartamientos pequeños:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

donde c_s es la llamada velocidad del sonido.

- Suponiendo parcelas de gas adiabáticas (en el tiempo de oscilación la parcela no alcanza a intercambiar energía con su entorno) y el gas es ideal, c_s depende de la presión del gas P_0 y de su densidad ρ_0:

$$c_s^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$$

γ es la constante adiabática del gas

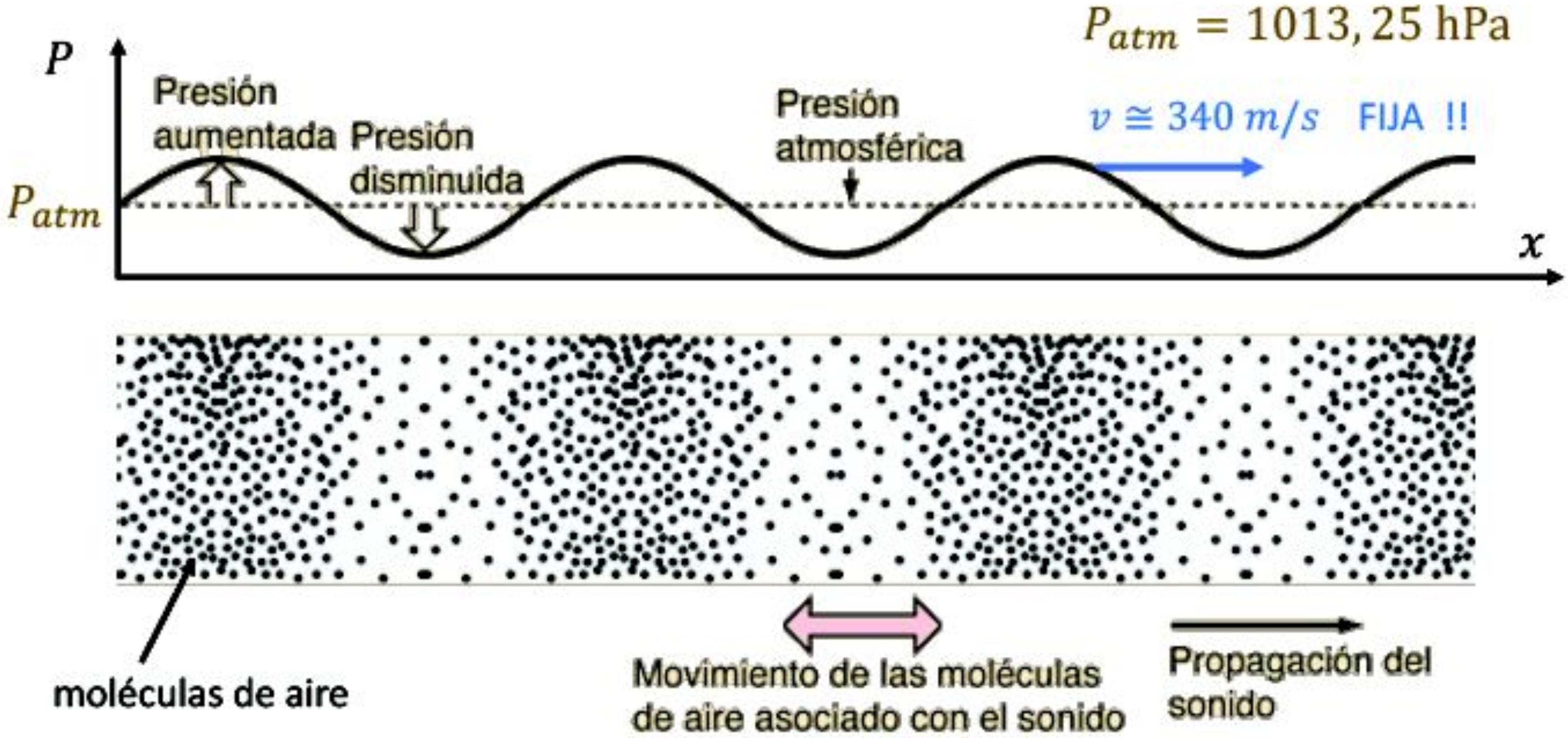
- La variación de la presión $P - P_0 = \Delta P(x,t)$ también cumple con la ecuación de onda variación:

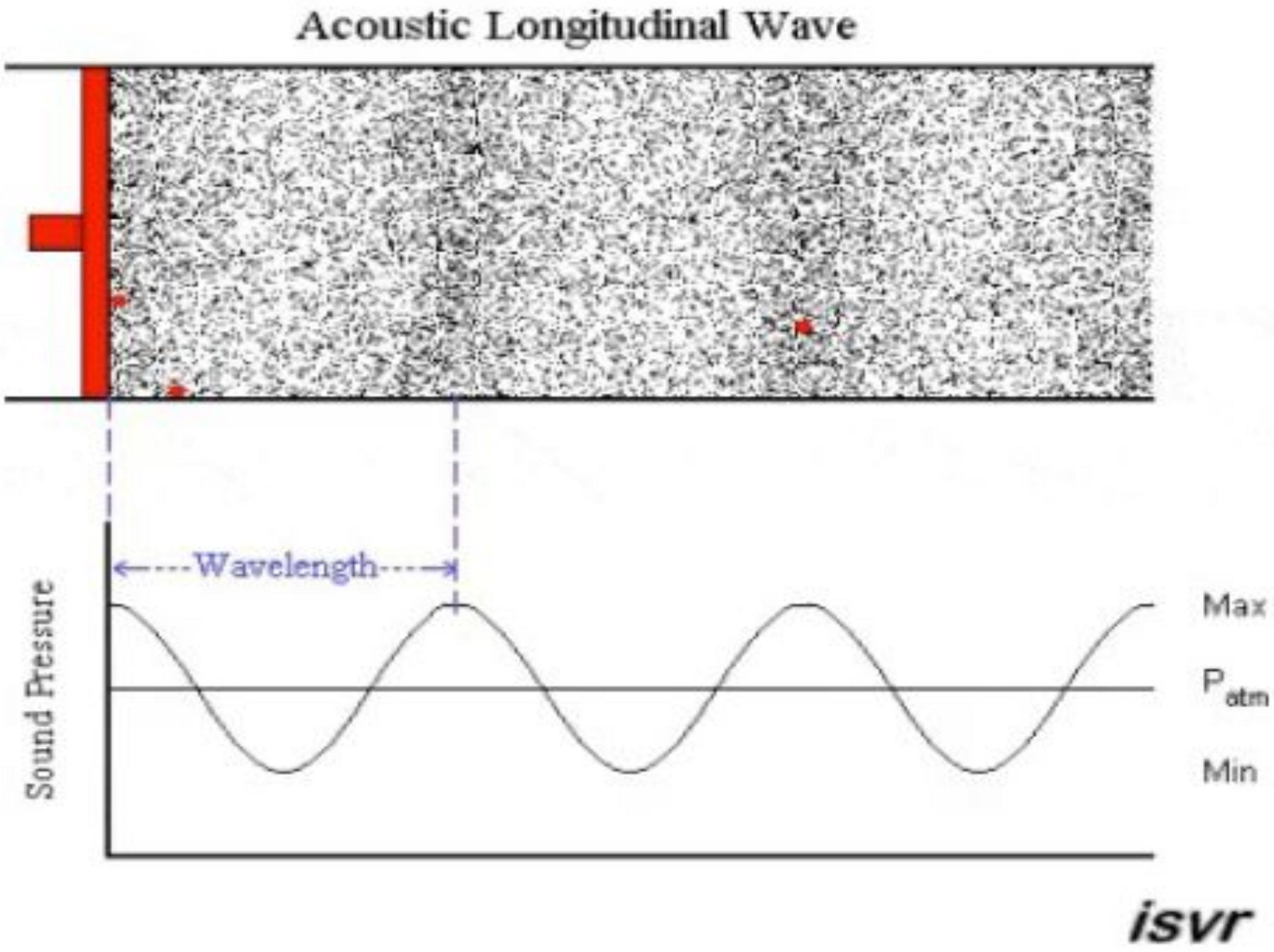
$$\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2}$$

- ΔP se relaciona con ξ a través de la derivada espacial:

$$\Delta P = -\gamma P_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Ondas sonoras en el aire (a presión ambiente)

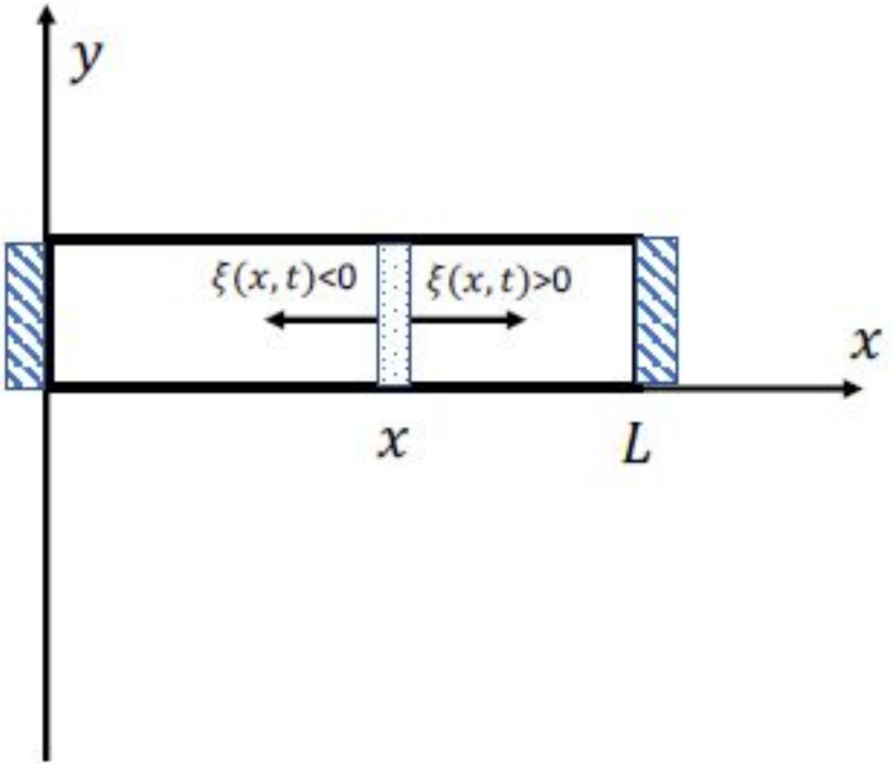




Acoustic Longitudinal Wave
Wavelength
Sound Pressure
Max
P_{atm}
Min
isvr

Ondas Sonoras: Condiciones de Contorno

- Tomamos un recipiente con aire cerrado en ambos extremos.
- Se generan ondas sonoras viajeras a lo largo de x.
- El choque con las paredes va a generar ondas en sentido contrario generando ondas estacionarias.



- ¿Cómo se expresarán las condiciones de contorno para $\xi(x,t)$ en el caso cerrado cerrado?