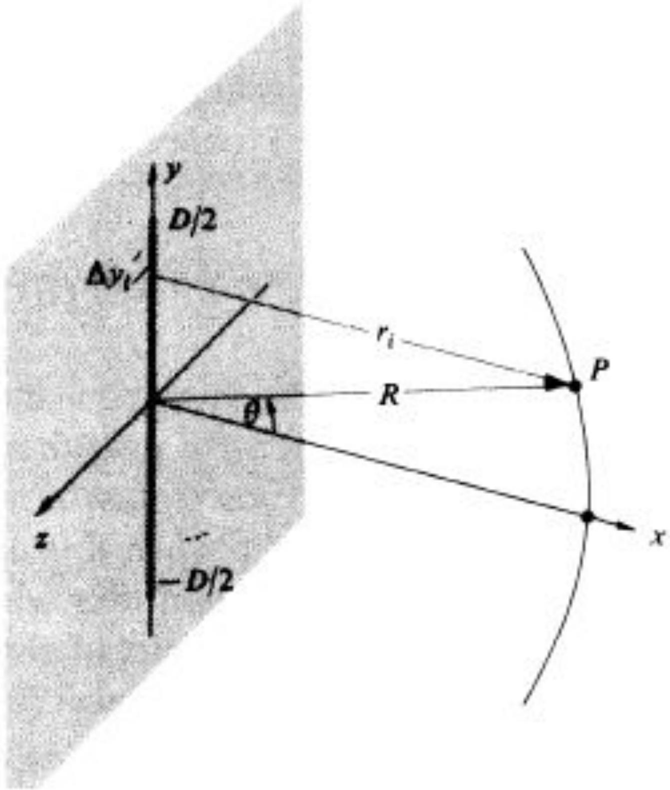
Aproximación: Línea contínua de fuentes coherentes

- Supongamos ahora un contínuo de fuentes en un segmento de largo D.
- Cada punto emite una onda esférica:

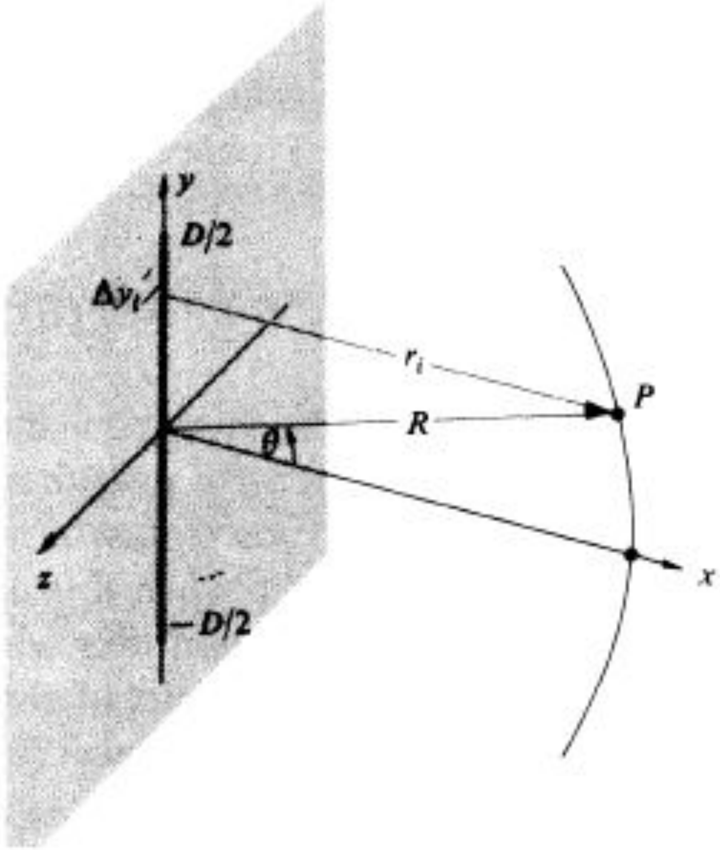
$$E = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{r}\right) \sin(\omega t - kr)$$

- Supongamos que la densidad de fuentes por unidad de distancia es $\frac{N}{D}$ con N grande.



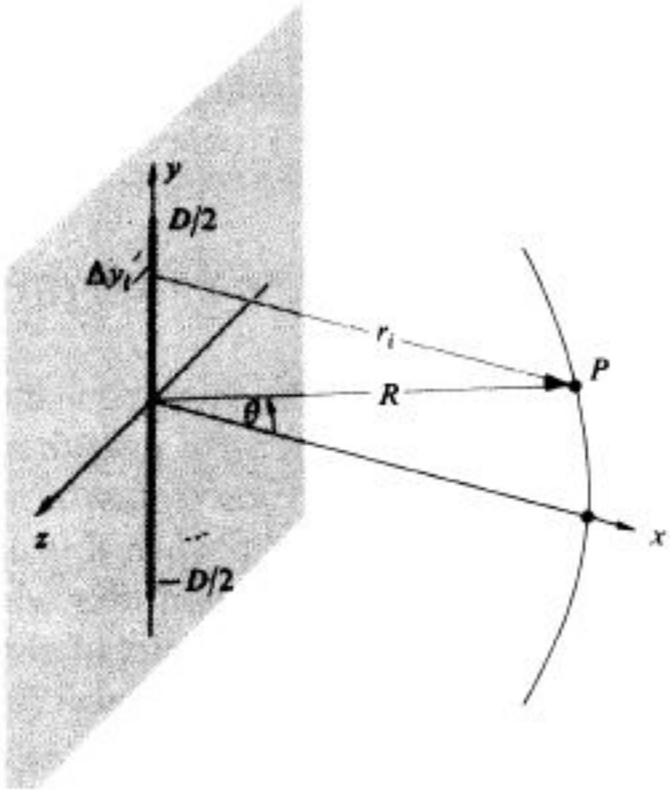
- Dividamos el segmento en M tramos de largo Δy en fase
- Cada segmento de largo Δy tendrá $\frac{N}{D}\Delta y$ fuentes
- La contribución del i-ésimo segmento Δy al campo eléctrico en el punto P es:

$$E_i = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{r_i}\right) \sin\,(\omega t - kr_i)\left(\frac{N\Delta y_i}{D}\right)$$



- Ahora para pasar una distribución contínua de fuentes tenemos que tender N a infinito y achicar ε_0 (la amplitud del campo eléctrico de cada fuente) de manera de tener un campo finito en P.
- Definimos la intensidad de la

$$\mathcal{E}_L \equiv \frac{1}{D} \lim_{N\to\infty} (\mathcal{E}_0 \mathrm{N})$$



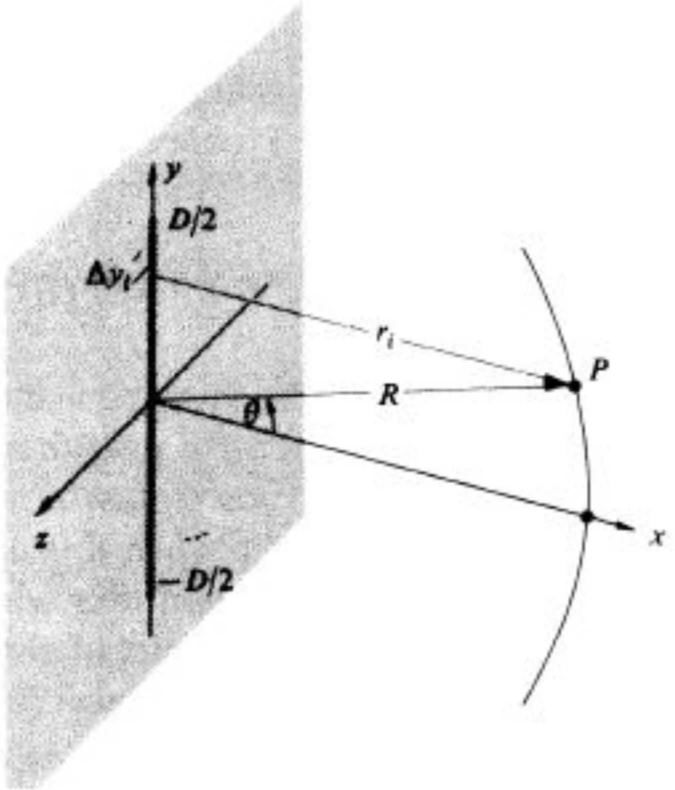
- Entonces, la suma de las contribuciones de los M segmentos de largo Δy_i queda:

$$E = \sum_{i=1}^{M} \frac{\mathcal{E}_L}{r_i} \sin(\omega t - kr_i)\Delta y_i$$

- En el límite $\lim\limits_{\Delta y \to 0}$ tenemos el campo en P integrando a lo largo del ancho D.

$$E = \mathcal{E}_L \int_{-D/2}^{+D/2} \frac{\sin(\omega t - kr)}{r}\, dy$$

Con $r = r(y)$



- Tomemos ahora el resultado anterior pero imaginemos que la distancia al punto de observación es muchísimo mayor al del largo de la línea:

$$R \gg D$$

- Esto hace que la distancia de cada dy hasta P (r) no varíe mucho con y.

- Es más, r no va a diferir de la distancia a P medida desde el centro de la línea, R.

- Entonces, la amplitud de la contribución del campo de cada dy también será la misma:

$$dE = \frac{\mathcal{E}_L}{R} \sin{(\omega t - kr)} dy$$

- Ahora, para aproximar r dentro de la fase hay que tener más cuidado.

Aproximación de Fraunhofer

- Haciendo el mismo planteo que para Young, tenemos que

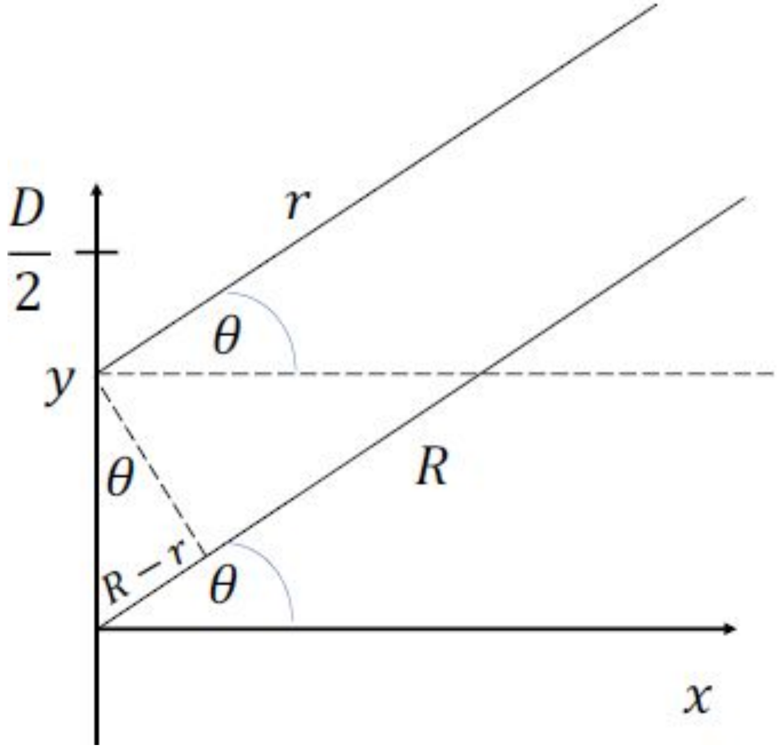
$$R - r \cong y \sin\theta$$

- Lo cual implica

$$r \cong R - y \sin\theta$$

- Entonces, en la aproximación de Fraunhofer:

$$E = \frac{\varepsilon_L}{R}\int_{-D/2}^{+D/2} \sin\left[\omega t - k(R - y\sin\theta)\right] dy$$



Recordando que: $\sin(\omega t - kR + ky\sin\theta) = \sin(\omega t - kR)\cos(ky\sin\theta) + \cos(\omega t - kR)\sin(ky\sin\theta)$

$$E = \frac{\varepsilon_L}{R}\left[\int_{-D/2}^{D/2} sin(wt - kR).\, cos(ky\, sin\,\theta)dy + \int_{-D/2}^{D/2} cos(wt - kR)sen(kysin\theta)dy\right]$$

$$E = \frac{\varepsilon_L}{R}\left[sin(wt - kR). \int_{-D/2}^{D/2} cos(ky\, sin\,\theta)dy + cos(wt - kR)\int_{-D/2}^{D/2} sen(kysin\theta)dy\right]$$

$$E = \frac{\varepsilon_L}{R}\left[\frac{sin(wt-kR).}{ksen(\theta)} sen(ky\, sin\,\theta)\Big|_{D/2}^{D/2} + \frac{cos(wt-kR)}{ksen(\theta)} cos(kysin\theta)\Big|_{D/2}^{D/2}\right] = \frac{\varepsilon_L}{R}(A + B)$$

$$A = \frac{\sin(wt - kR).}{k sen(\theta)}\left[sen\left(\frac{k\,D\sin\theta}{2}\right) - sen\left(-\frac{k\,D\sin\theta}{2}\right)\right] = \frac{\sin(wt - kR).}{k sen(\theta)}\left[2sen\left(\frac{k\,D\sin\theta}{2}\right)\right]$$

$\boxed{sen(\Theta)=-sen(-\Theta)}$

$$B = \frac{\cos(wt - kR).}{k sen(\theta)}\left[\cos\left(\frac{k\,D\sin\theta}{2}\right) - \cos\left(-\frac{k\,D\sin\theta}{2}\right)\right] = 0$$

Reemplazo estos dos resultados en la expresión anterior y multiplico y divido por D

$$E = \frac{D.\varepsilon_L}{DR}\left[\frac{\sin(wt - kR).}{k sen(\theta)}\, 2sen\left(\frac{k\,D\sin\theta}{2}\right)\right] =$$

- Resultando

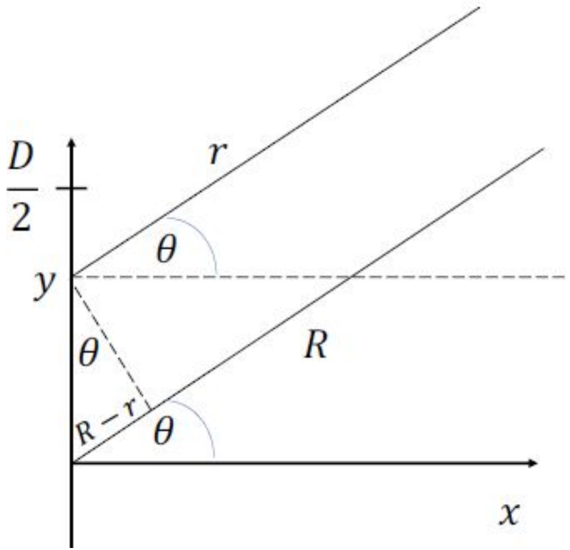
$$E = \frac{\mathcal{E}_L D}{R} \frac{\sin[(kD/2)\sin\theta]}{(kD/2)\sin\theta} \sin(\omega t - kR)$$

- Si hacemos

$$\beta \equiv (kD/2)\sin\theta$$

- Tenemos

$$E = \frac{\mathcal{E}_L D}{R}\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)\sin(\omega t - kR)$$



- La irradiancia entonces, es proporcional al promedio temporal del cuadrado del campo electrico

$$I(\theta) = \langle |E|^2 \rangle$$

- Como $\langle |\sin(\omega t - kR)|^2 \rangle = 1/2$ obtenemos:

$$\boxed{I(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{E}_L D}{R}\right)^2 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2}$$

Recordemos que β depende de ϴ entonces uno puede preguntarse cómo varía I(ϴ):

$$\beta \equiv (kD/2)\sin\theta$$

- Tenemos un máximo en $\beta = 0 \iff \theta = 0$

$$I(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_L D}{R}\right)^2$$

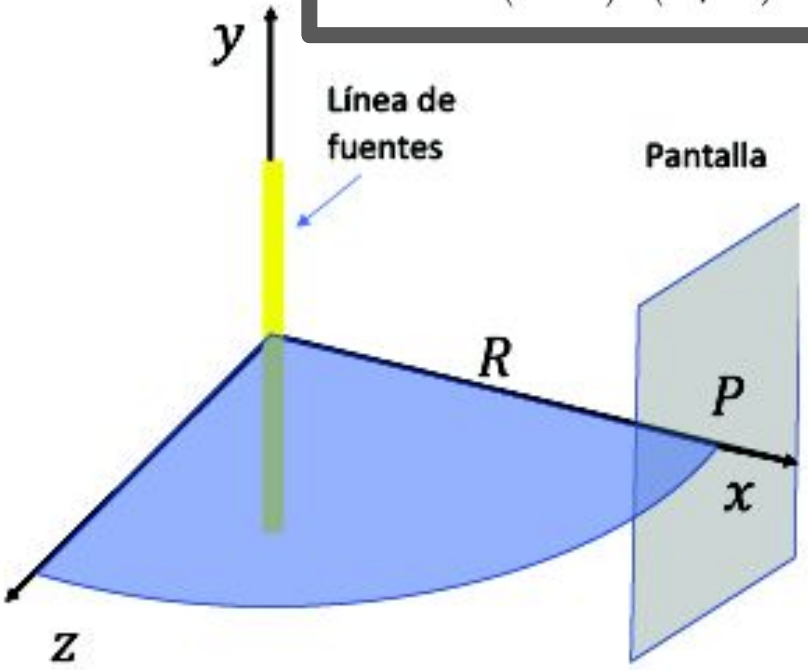
$$I(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{E}_L D}{R}\right)^2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$

- Tendremos mínimos $I(\theta_{min}) = 0$ en $\beta = \pm n\pi$ para $n = 1,2,3,4\,...$
- Esto implica

$$\sin\theta_{min} = \pm\frac{2n\pi}{kD} = \pm\frac{n\lambda}{D}$$

$$I(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{E}_L D}{R}\right)^2 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$

- Notemos que cuando $D \gg \lambda$ entonces la irradiancia decae muy rápido con θ por culpa de β en el denominador
- Esto se ve para valores de $D \approx 1cm$ para luz visible
- En cuanto a la fase, es como si toda la línea fuera una fuente puntual situada en el centro de la línea a una distancia R de P
- Es como si irradiara una onda circular en el plano $\theta = 0$ (perpendicular a la linea)



Para $D \gg \lambda$ la emisión se da en el plano xz

$$I(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{E}_L D}{R}\right)^2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$

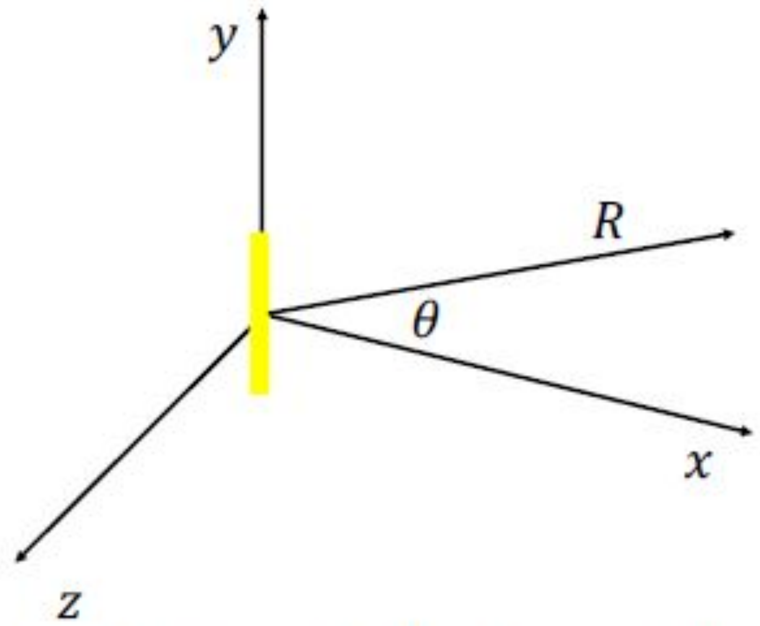
- Si, por el contrario $\lambda \gg D$ entonces β es pequeño y luego:

$$\beta \cong \sin\beta$$

- Entonces:

$$I(\theta) = I(0)$$

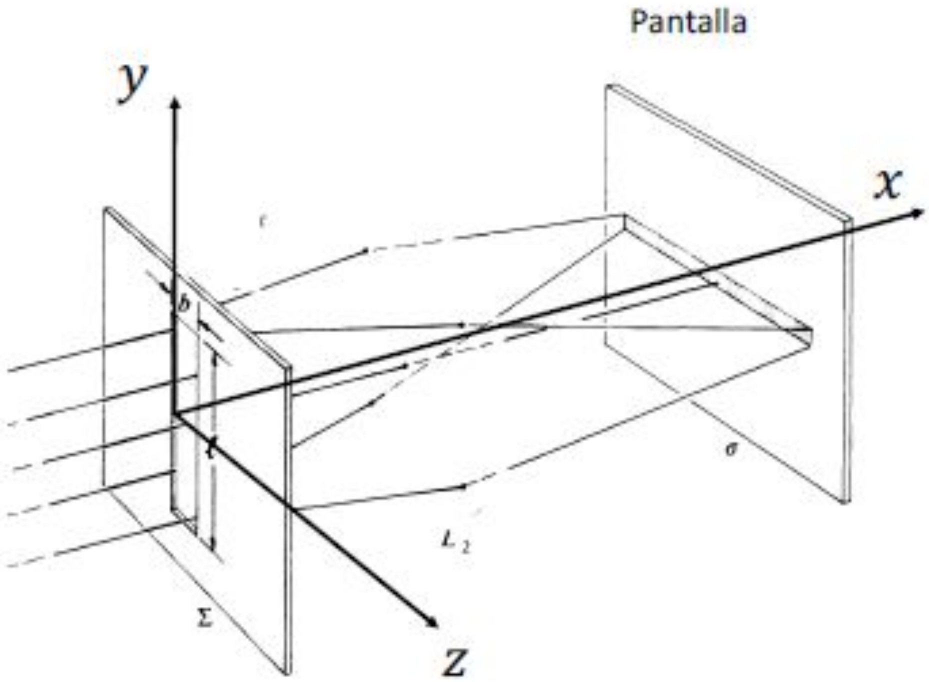
- Entonces la irradiancia es constante para todo θ y entonces la línea parece una fuente puntual en el centro emitiendo ondas esféricas



Para $\lambda \gg$ D la irradiancia es la misma para todo θ

Difracción de Fraunhofer por una rendija

- Consideremos ahora la difracción de Fraunhofer de ondas planas a través de una abertura rectangular tal que:
- La abertura tiene un largo l de varios cm ($l >> \lambda$).
- El ancho de la abertura b es de algunos cientos de λ ($b > \lambda$).



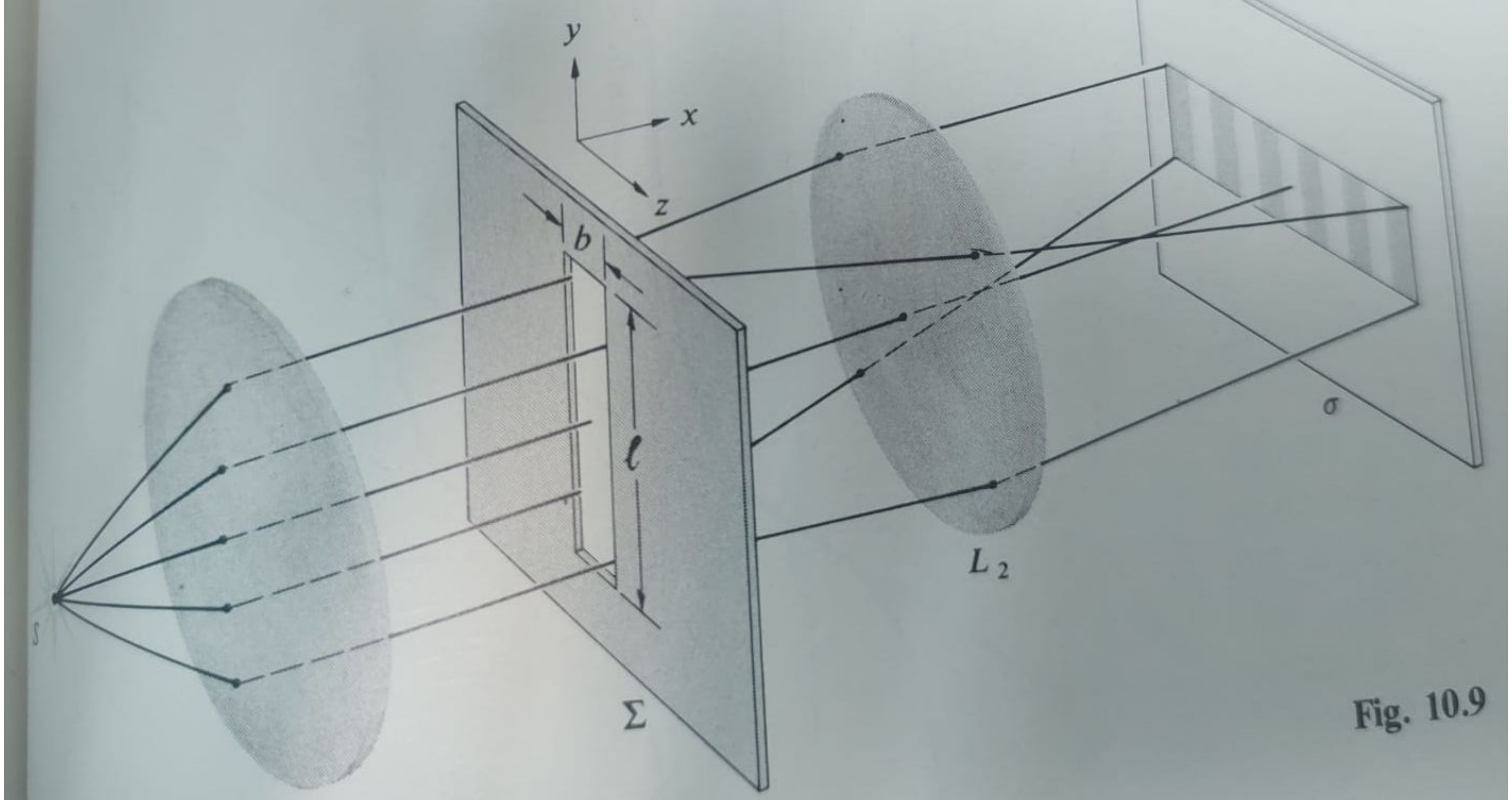
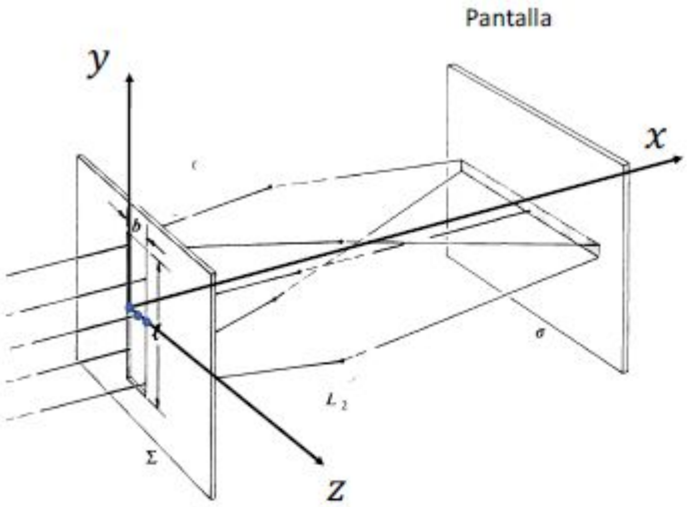
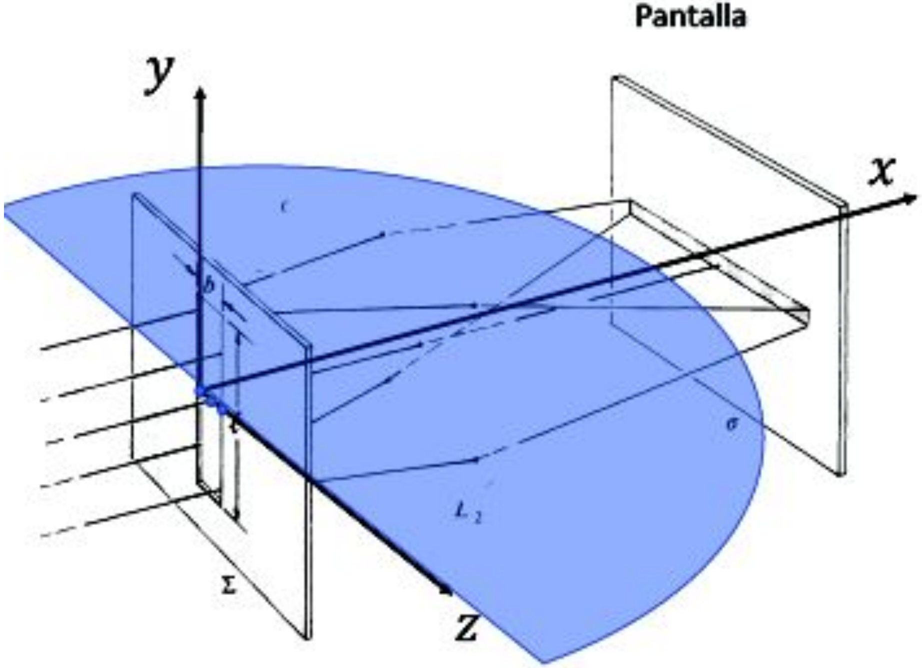


Fig. 10.9

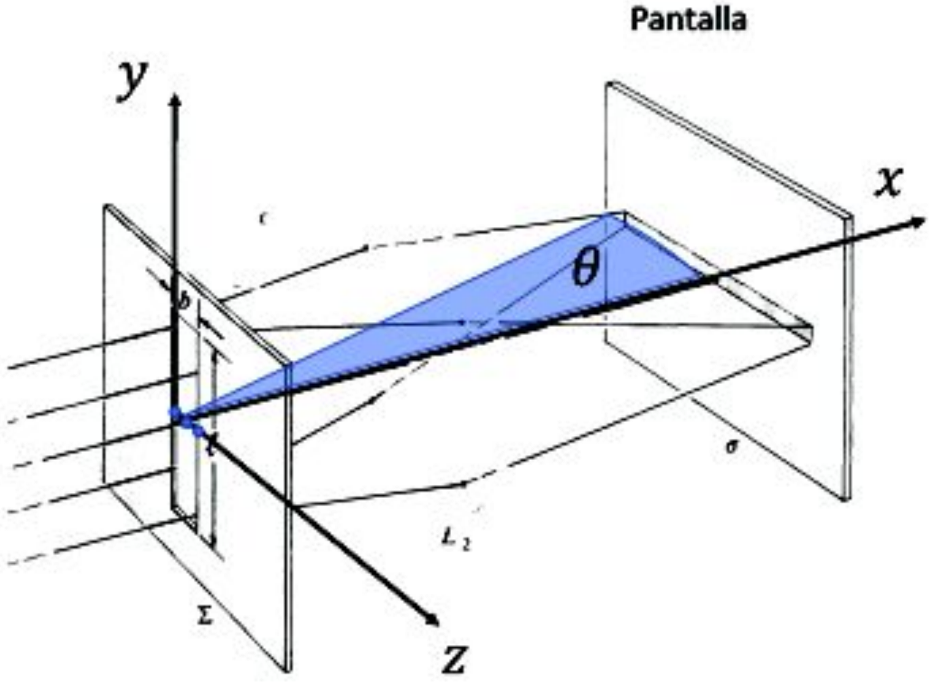
- Lo que se hace normalmente es dividir la ranura en segmentos verticales de fuentes coherentes como las que vimos anteriormente.
- Por lo que acabamos de ver, cuando $l >> \lambda$ cada segmento puede representarse como una sola fuente puntual a lo largo del eje z que irradia en el plano xz



- Entonces habrá muy poca difracción en la dirección paralela a los bordes de la rendija.



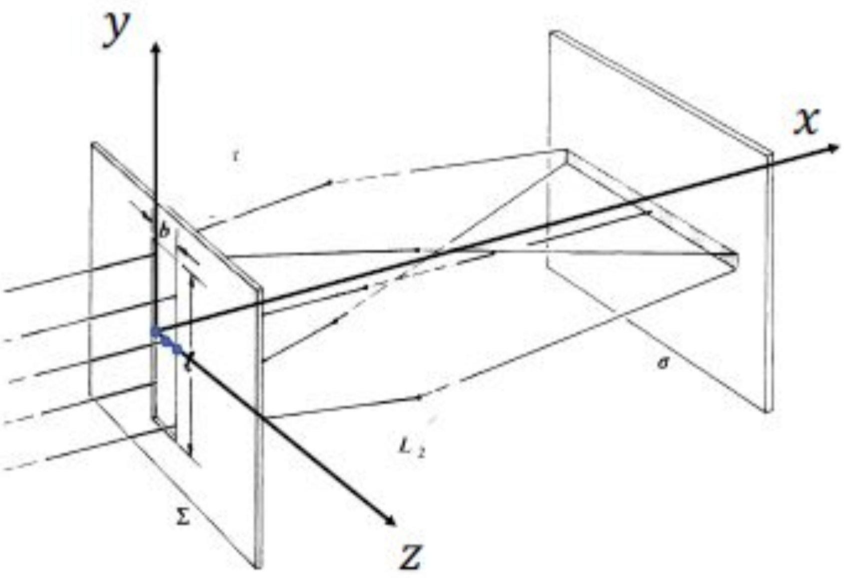
- En esas condiciones, el ángulo θ indica la dirección al punto de evaluación de la irradiancia sobre la pantalla.
- θ se mide desde el eje x sobre el plano xz.



- Entonces, el problema se limita al de una serie de fuentes coherentes en el eje z a lo largo de una distancia b.
- Este problema ya lo analizamos y la irradiancia resultante es

$$I(\theta) = I(0)\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$

- donde $\beta = (kb/2)\sin\theta$



En la pantalla el patrón es perpendicular al lado mayor de la rendija

$$I(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{E}_L D}{R}\right)^2 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$

- Para graficar $I(\theta)$ versus $\sin\theta$ volvamos a ver sus máximos y mínimos.

- $I(\theta) \geq 0$ por definición

- Máximo en $\theta = 0$ lo cual ocurre sí y solo sí $\beta = 0$

- Mínimos ($I = 0$) cuando $\beta = \pm\pi, \pm 2\pi \ldots \pm n\pi$. Esto implica que los mínimos se hallan en:

$$\sin\theta_{min} = \pm\frac{2n\pi}{kb} = \pm\frac{n\lambda}{b}$$

- Ahora, que haya mínimos en $\beta = \pm\pi, \pm 2\pi \ldots \pm n\pi$ implica que entre ellos debe haber máximos.

- Entre los mínimos de primer orden, en $\sin\theta_{1min} = \pm\frac{\lambda}{b}$ tenemos el máximo central del patrón de difracción.

- ¿Qué pasa con los otros?

- Busquemos otros valores de $I(\beta)$ extremos haciendo $\frac{dI(\beta)}{d\beta} = 0$

- Derivando tenemos:

$$\frac{dI}{d\beta} = I(0)\frac{2\sin\beta\boxed{(\beta\cos\beta - \sin\beta)}}{\beta^3} = 0$$

Puede ser cero

- Por un lado tenemos máximo cuando $\beta = 0$ y mínimos cuando

$$\beta = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$$

- Es que el término encerrado sea cero. De ahí se obtiene:

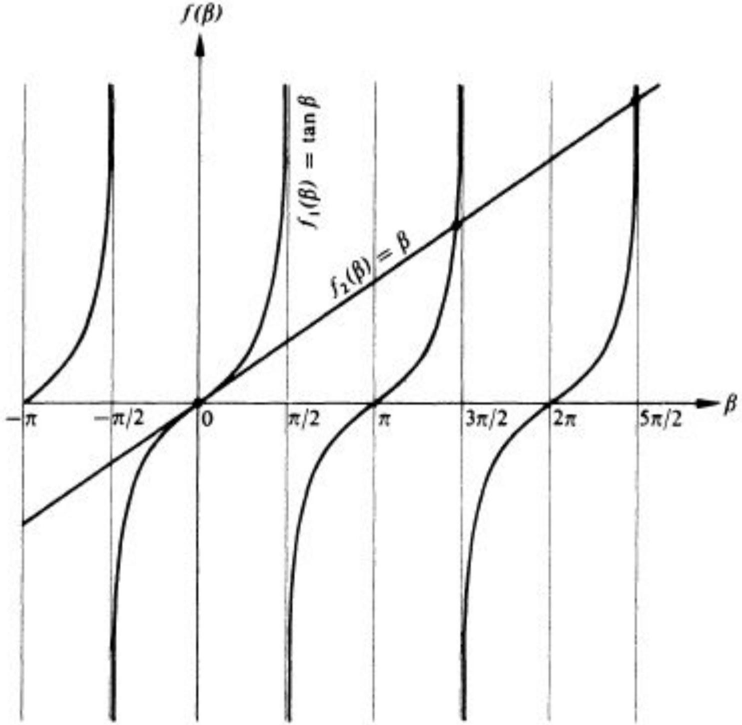
$$\beta\cos\beta - \sin\beta = 0$$

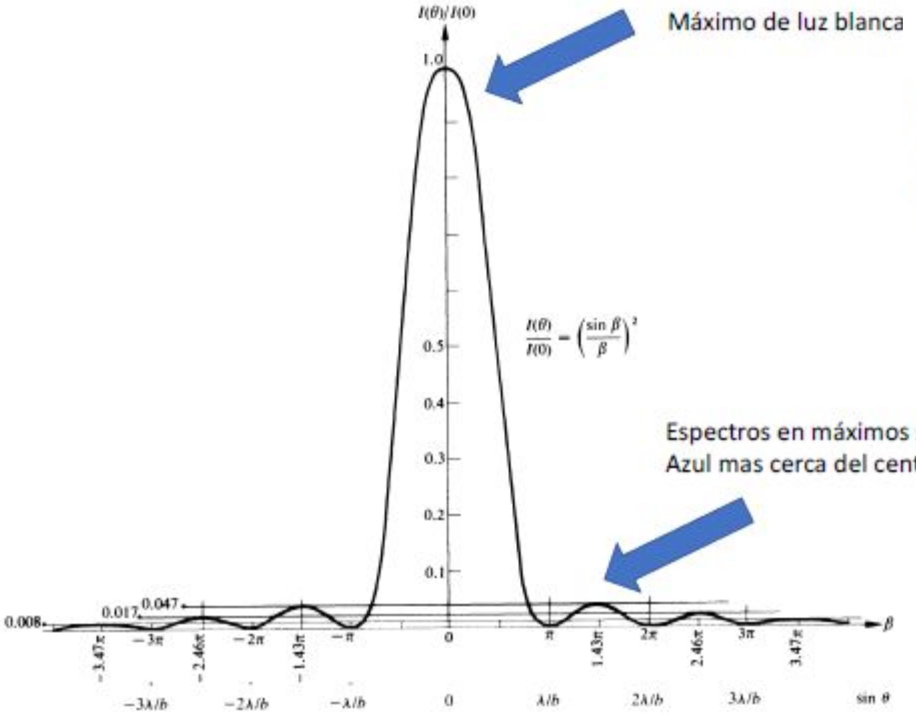
$$\tan\beta = \beta$$

- La ecuación anterior no tiene soluciones analíticas, pero sí numéricas.

- Sus primeras raices son:
$$\beta = \pm 1{,}4303\pi,$$
$\pm 2{,}4590\pi, \pm 3{,}4707\pi \ldots$

- Esto es casi a mitad de camino entre dos mínimos





Máximo de luz blanca

Espectros en máximos secundarios
Azul mas cerca del centro, rojo mas lejos

Luz monocromática

Luz blanca