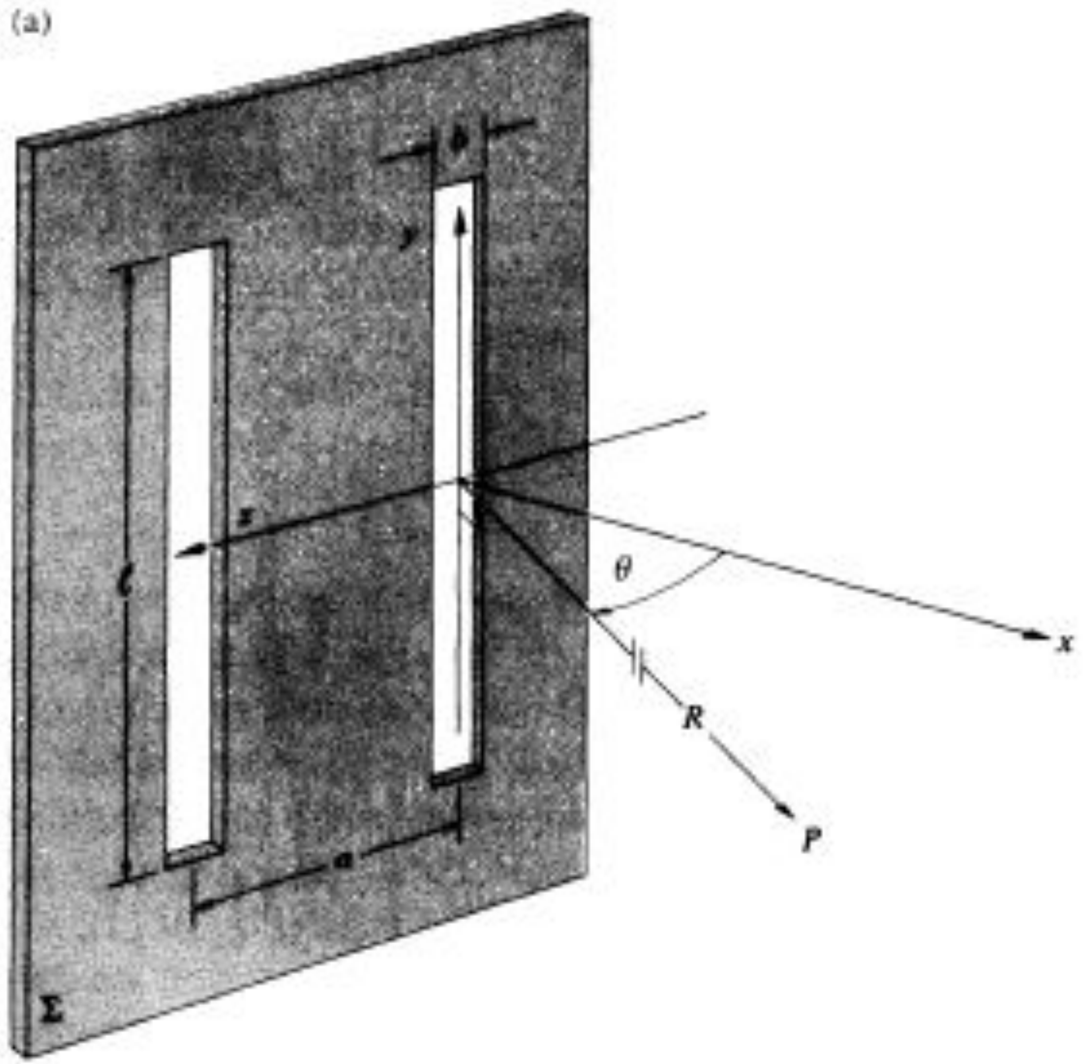
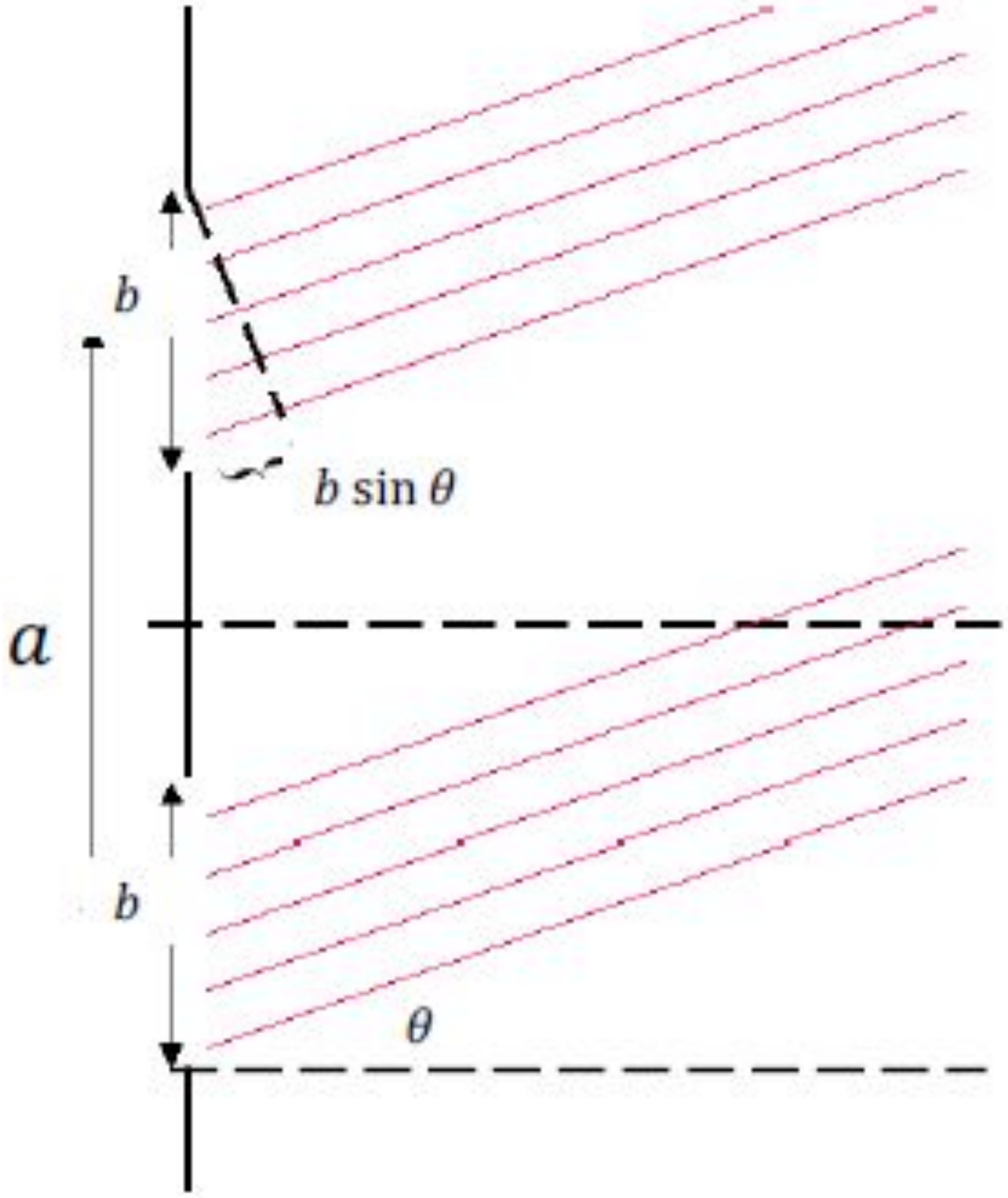
Difracción de dos rendijas

- Supongamos dos rendijas idénticas del ancho b cuyos centros están separados una distancia a.
- Cada rendija por separado va a generar el patrón de difracción que vimos anteriormente.
- Para cada punto de la pantalla, las contribuciones al campo de cada rendija van a sumarse con la posibilidad de generar interferencia.



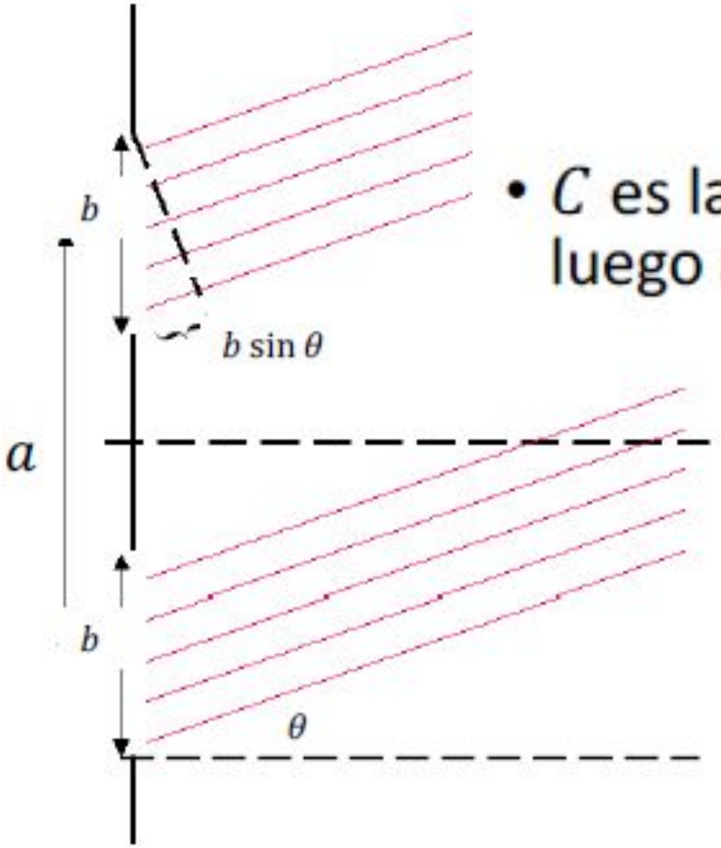
- Recordemos el principio de Huygens Fresnel.
- Para una fuente lejana, la diferencia de fase inicial entre las ondas secundarias en las dos rendijas es cero.
- Luego, la diferencia de fase entre las ondas secundarias que llegan a un mismo punto P dependerá de la diferencia de camino óptico.



- Hagamos el mismo planteo que para la rendija única ahora para dos rendijas vistas como dos segmentos de fuentes puntuales coherentes.
- La contribución del campo en un punto de la pantalla viene dada por:

$$E = C\int_{-b/2}^{b/2} F(z)\,dz + C\int_{a-b/2}^{a+b/2} F(z)\,dz$$

rendija 1 rendija 2



- C es la misma pues es la misma amplitud que llega a cada rendija y luego a cada punto de la pantalla.

- La función a integrar es similar al caso de una línea de fuentes, ahora sobre el eje z.

$$F(z) = \sin\left[\omega t - k(R - z\sin\theta)\right]$$

donde R es la distancia entre la rendija 1 y la pantalla

- La integral da:

$$E = bC\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)\left[\sin(\omega t - kR) + \sin(\omega t - kR + 2\alpha)\right]$$

donde $\alpha = \frac{ka}{2}\sin\theta$

- Elevando la expresión anterior al cuadrado y promediándola en el tiempo para tiempos largos llegamos a la expresión para la irradiancia:

$$I(\theta) = 4I_0\left(\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\right)\cos^2\alpha$$

es la intensidad para una rendija (teórica 19)

$$I(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_L D}{R}\right)^2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$

$$I(\theta) = 4I_0\left(\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\right)\cos^2\alpha$$

- Esta expresión tiene un máximo en $\theta = 0$ con lo cual $\alpha = \beta = 0$.
- Ya vimos que los mínimos de difracción tenían lugar para $\beta = \pm\pi, \pm 2\pi \ldots \pm n\pi$. Esto implicaba que los mínimos de difracción se hallan en:

$$\sin\theta_{mindif} = \pm\frac{2n\pi}{kb} = \pm\frac{n\lambda}{b}$$

- Por otro lado, los mínimos de interferencia ocurren cuando:

$$\alpha = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \ldots$$

- Esto último implica que

$$\sin\theta_{minint} = \pm\frac{(2n+1)2\pi}{2ka} = \pm\frac{(2n+1)\lambda}{2a} \quad \mathrm{n} = 0,1,2\ldots$$

- Por último, los máximos de interferencia ocurrirán cuando

$$\alpha_{maxint} = \pm n\pi \quad n = 1,2,3\ldots$$

- es decir, en las posiciones

$$\sin\theta_{maxint} = \pm\frac{2\pi n}{ka} = \pm\frac{n\lambda}{a}$$

¿Qué pasa si coincide un mínimo con un máximo?

- Puede darse el caso que a sea un múltiplo de b:

$$a = mb \quad m \in \mathbb{N}$$

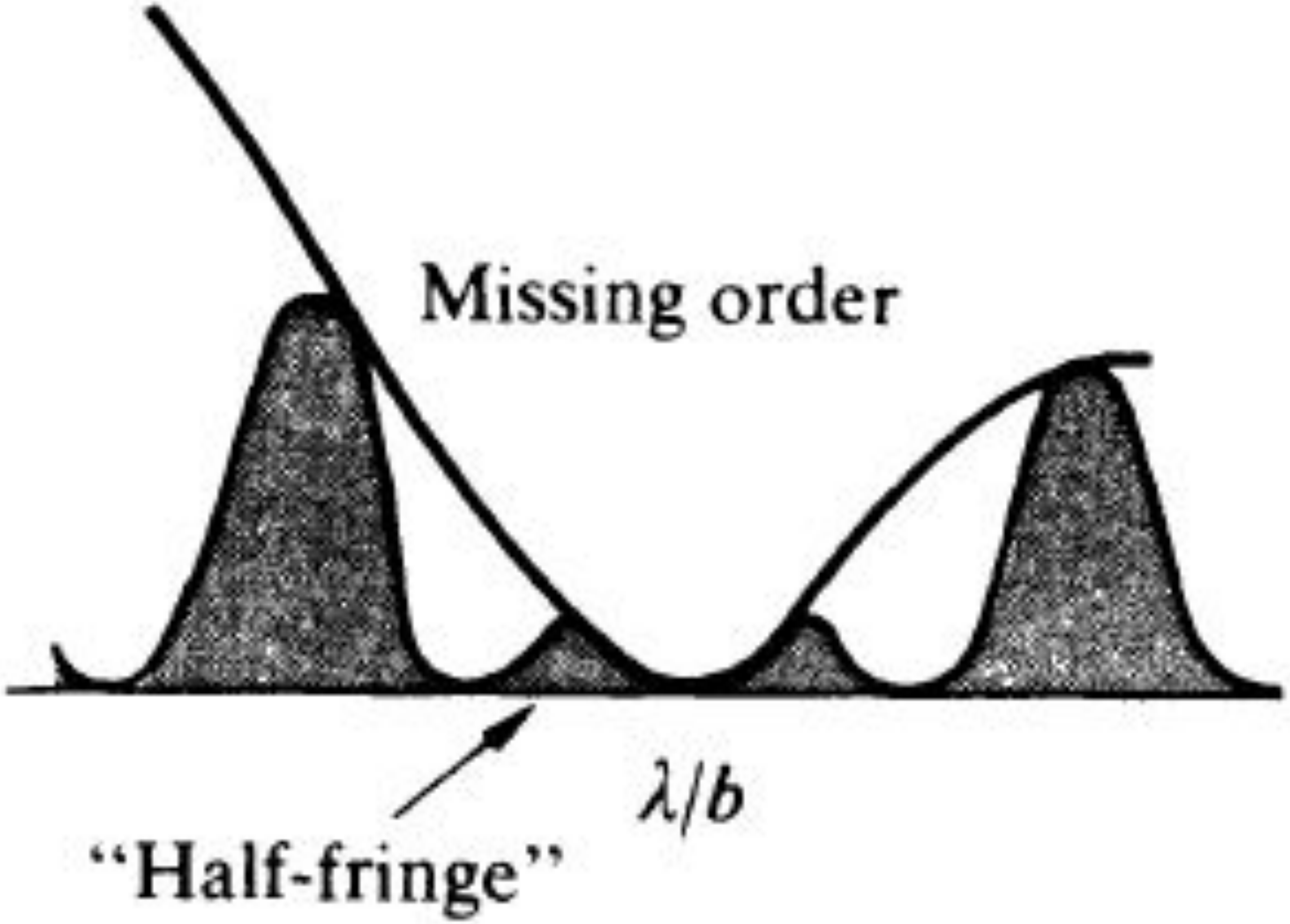
- Eso hace que haya 2m líneas brillantes dentro del pico central de difracción.
- Un máximo de interferencia puede coincidir espacialmente con un mínimo de difracción si:

$$a = \frac{m}{n} b$$

- En ese caso, el máximo m-ésimo coincidirá con el mínimo n-ésimo:

$$\sin \theta_{maxint}(m) = \frac{m\lambda}{a} = \sin \theta_{mindif} = \frac{n\lambda}{b}$$

¿Qué pasa si coincide un mínimo con un máximo?



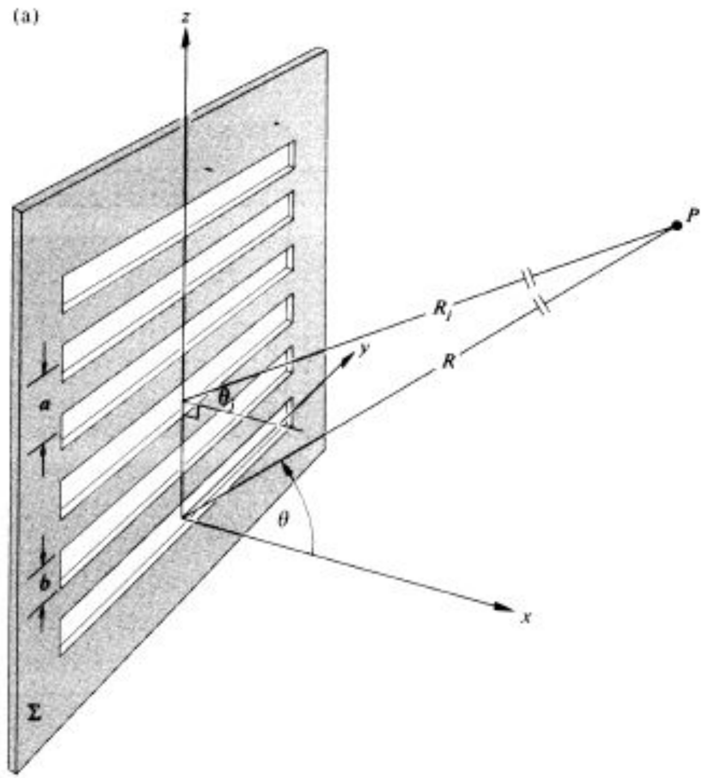
Difracción de N rendijas

- Al igual que para el caso de dos rendijas sumemos las contribuciones al campo magnético en un punto de la pantalla:

$$E = C\int_{-b/2}^{b/2} F(z)\,dz + C\int_{a-b/2}^{a+b/2} F(z)\,dz$$

$$+ C\int_{2a-b/2}^{2a+b/2} F(z)\,dz + \cdots$$

$$+ C\int_{(N-1)a-b/2}^{(N-1)a+b/2} F(z)\,dz$$

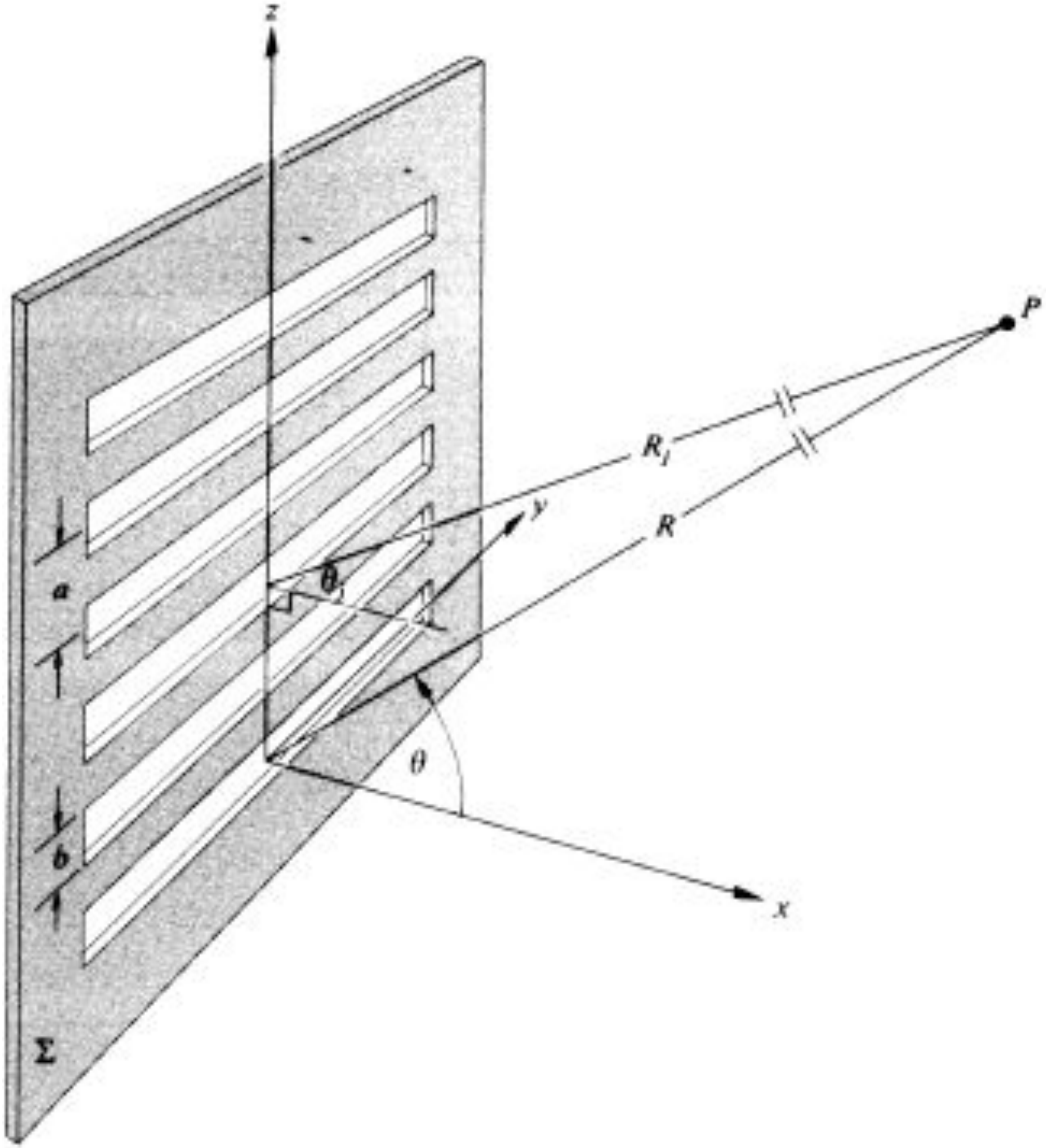


- En la expresión anterior, la función $F(z)$ sigue siendo:

$$F(z) = \sin\left[\omega t - k(R - z\sin\theta)\right].$$

- Una suposición adicional es que todo el conjunto de rendijas debe cumplir con la aproximación de Fraunhofer:

$$r = R - z\sin\theta$$

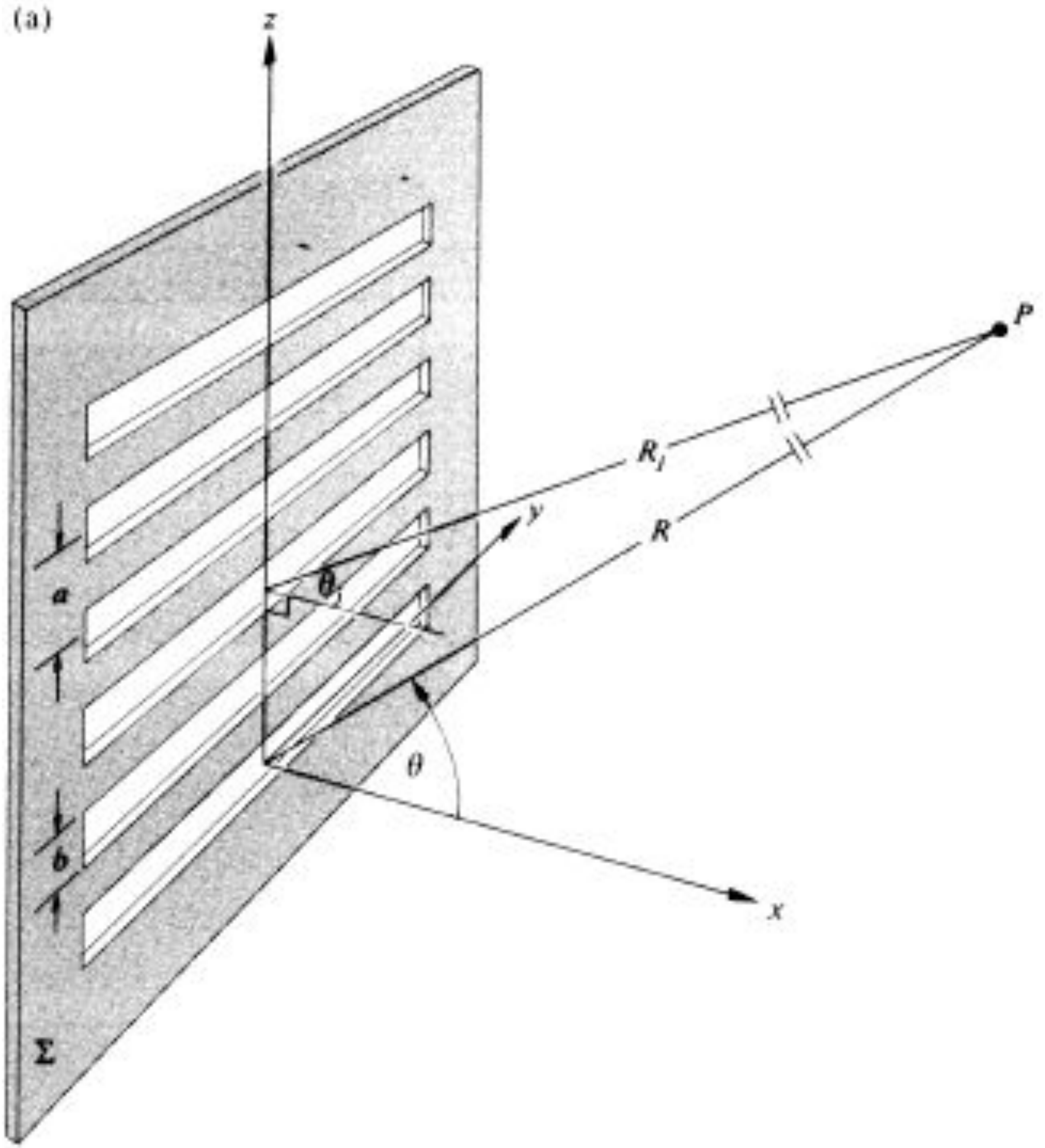


- La contribución de la j-ésima rendija a la integral si $\theta_i = \theta$

$$E_j = bC\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)\sin\,(\omega t - kR + 2\alpha j)$$

- Entonces la contribución total en el punto P es:

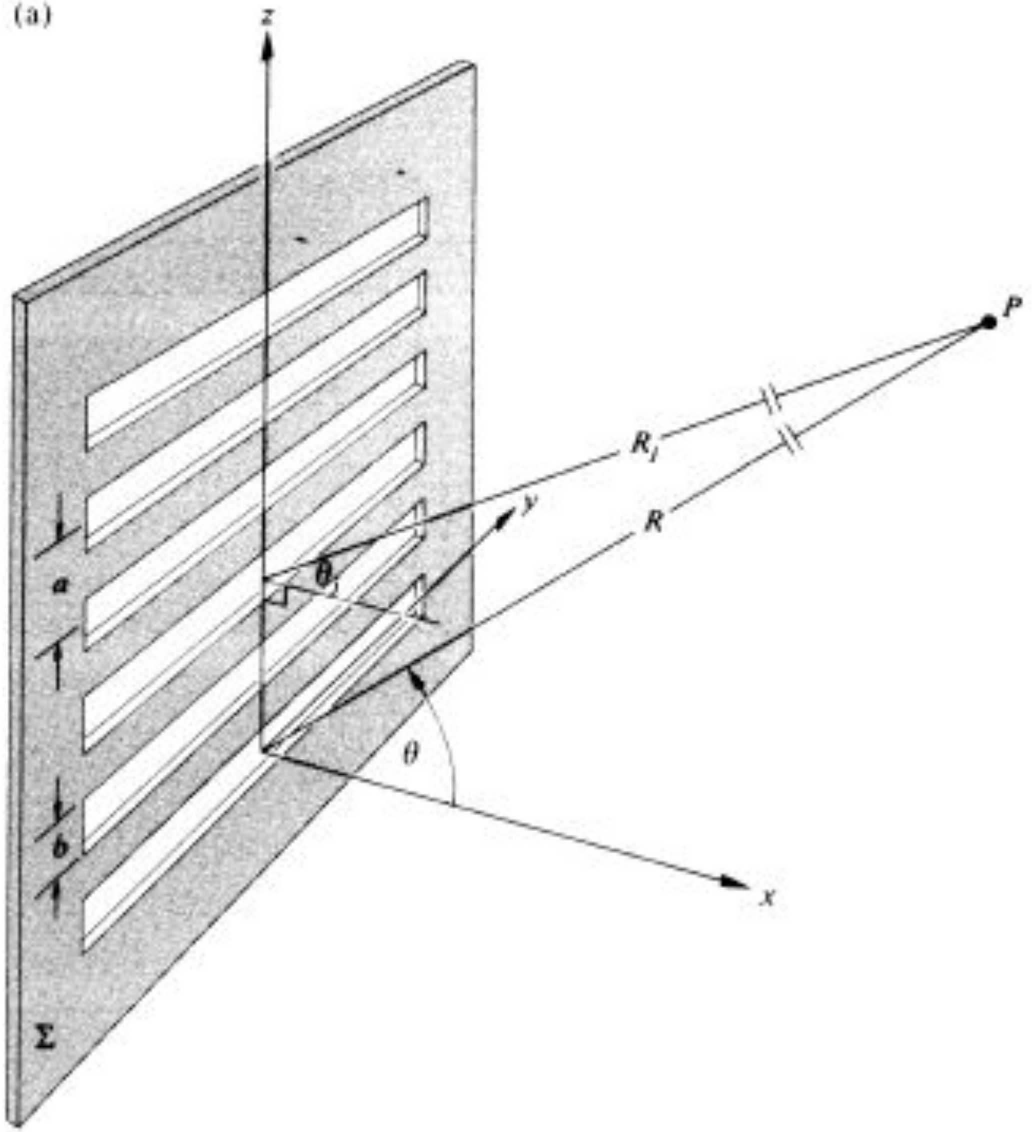
$$E = \sum_{j=0}^{N-1} bC\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)\sin\,(\omega t - kR + 2\alpha j)$$



- Esto equivale a:

$$E = \mathrm{Im}\left[bC\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right) e^{i(\omega t - kR)} \sum_{j=0}^{N-1} \left(e^{i2\alpha}\right)^j \right]$$

(a)



- Pero ya vimos esta serie geométrica, con lo cual concluimos

$$E = bC\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)\sin[\omega t - kR + (N-1)\alpha]$$

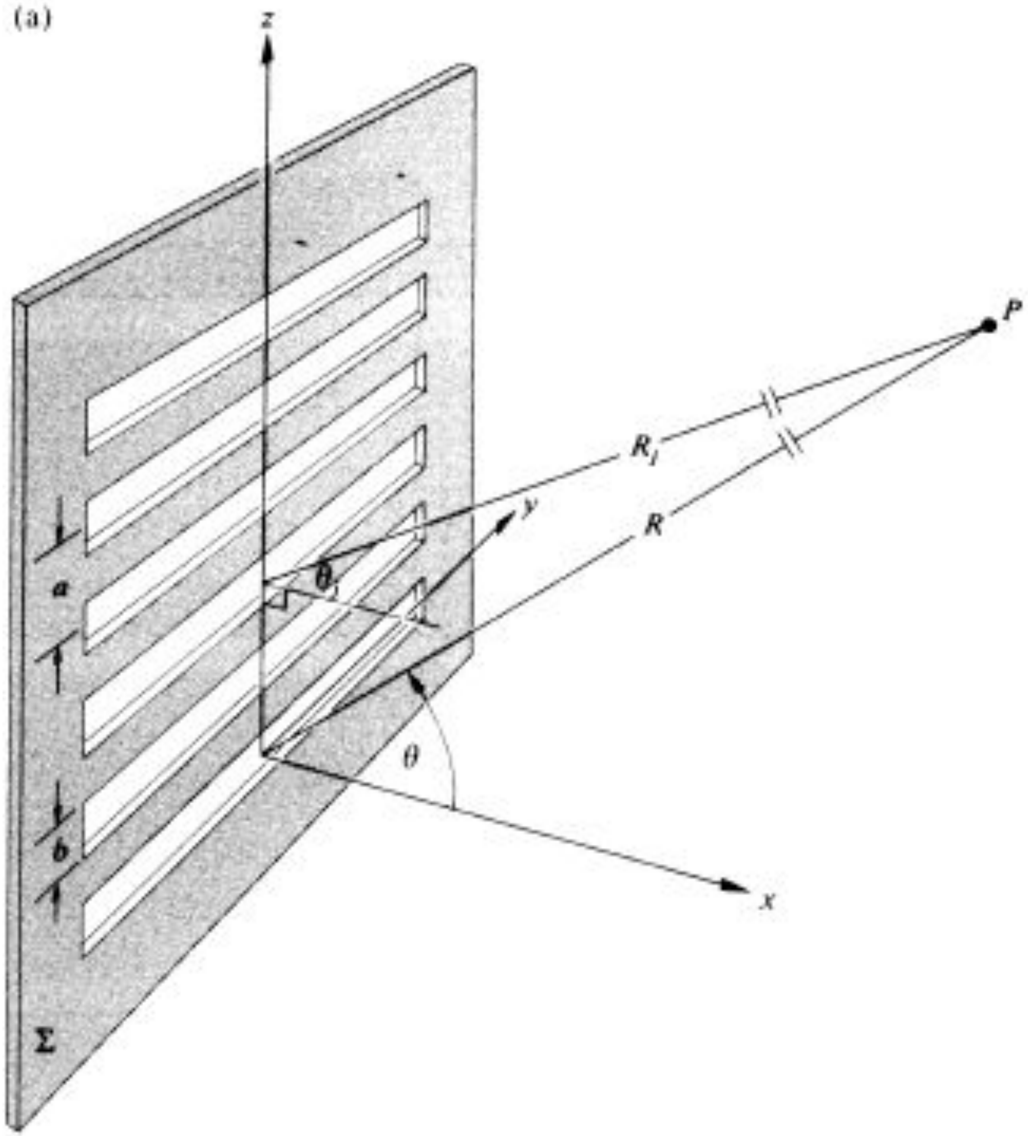
- Entonces, la irradiancia queda:

$$I(\theta) = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

- donde

$$\alpha = \frac{ka}{2}\sin\theta$$

$$\beta = \frac{kb}{2}\sin\theta$$

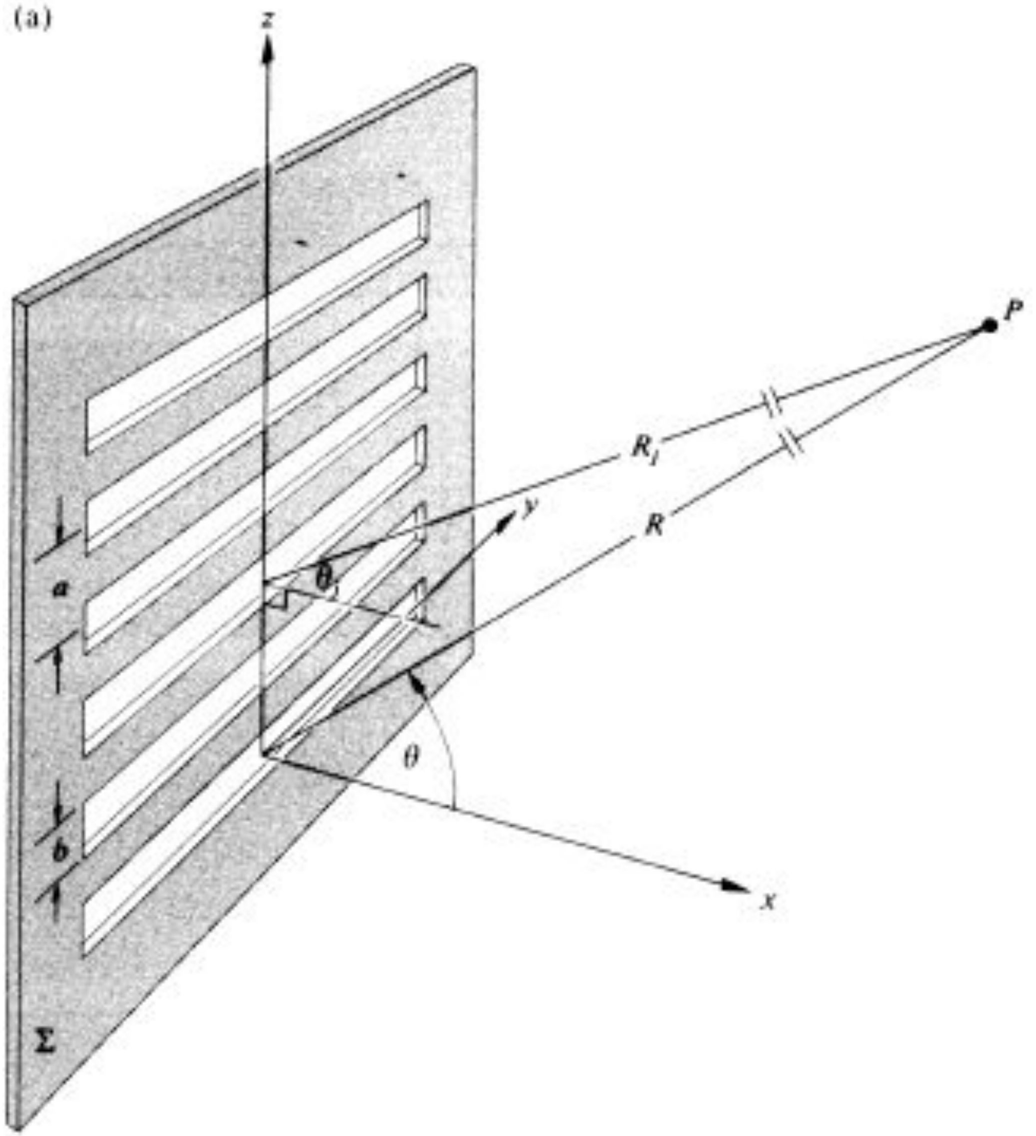


- Veamos qué aporta el factor

$$\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha}\right)^2$$

- Este factor alcanza un valor máximo igual a N^2 cuando

$$\alpha = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$$



Máximos de Interferencia (N rendijas)

- Entonces, los máximos de

$$\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha}\right)^2$$

- Ocurren en las posiciones:

$$\sin \theta_{maxint} = \pm \frac{n\lambda}{a} \;;\quad 0, 1, 2, 3 \ldots$$

- Los mínimos de la función

$$\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha}\right)^2$$

- Son más fáciles de encontrar, estos ocurren para los valores de

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{N}, \pm \frac{2\pi}{N}, \pm \frac{3\pi}{N}, \ldots, \pm \frac{(N-1)\pi}{N}, \pm \frac{(N+1)\pi}{N}, \ldots$$

- Los mínimos de la función

$$\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha}\right)^2$$

- Son más fáciles de encontrar, estos ocurren para los valores de

$$\alpha = \pm\frac{\pi}{N}, \pm\frac{2\pi}{N}, \pm\frac{3\pi}{N}, \ldots, \pm\frac{(N-1)\pi}{N}, \pm\frac{(N+1)\pi}{N}, \ldots$$

Mínimos de Interferencia (N rendijas)

- En consecuencia, entre dos máximos de interferencia (que llamaremos principales) existen $N-1$ mínimos. Por ejemplo, entre el máximo central y los máximos principales de orden ± 1 los mínimos ocurren para

$$\alpha = \pm\frac{\pi}{N}, \pm\frac{2\pi}{N}, \pm\frac{3\pi}{N}, \ldots, \pm\frac{(N-1)\pi}{N}$$

- En este ejemplo, esto corresponde a las ubicaciones:

$$\sin\theta_{minint} = \pm\frac{\lambda}{aN}, \pm\frac{2\lambda}{aN}, \pm\frac{3\lambda}{aN}, \ldots, \pm\frac{(N-1)\lambda}{aN}$$

Máximos Secundarios de Interferencia (N rendijas)

- Si existen $N-1$ **mínimos entre dos máximos principales**, deben existir **máximos secundarios entre esos mínimos**. Entre el máximo central y el primer máximo principal los máximos secundarios se ubican en

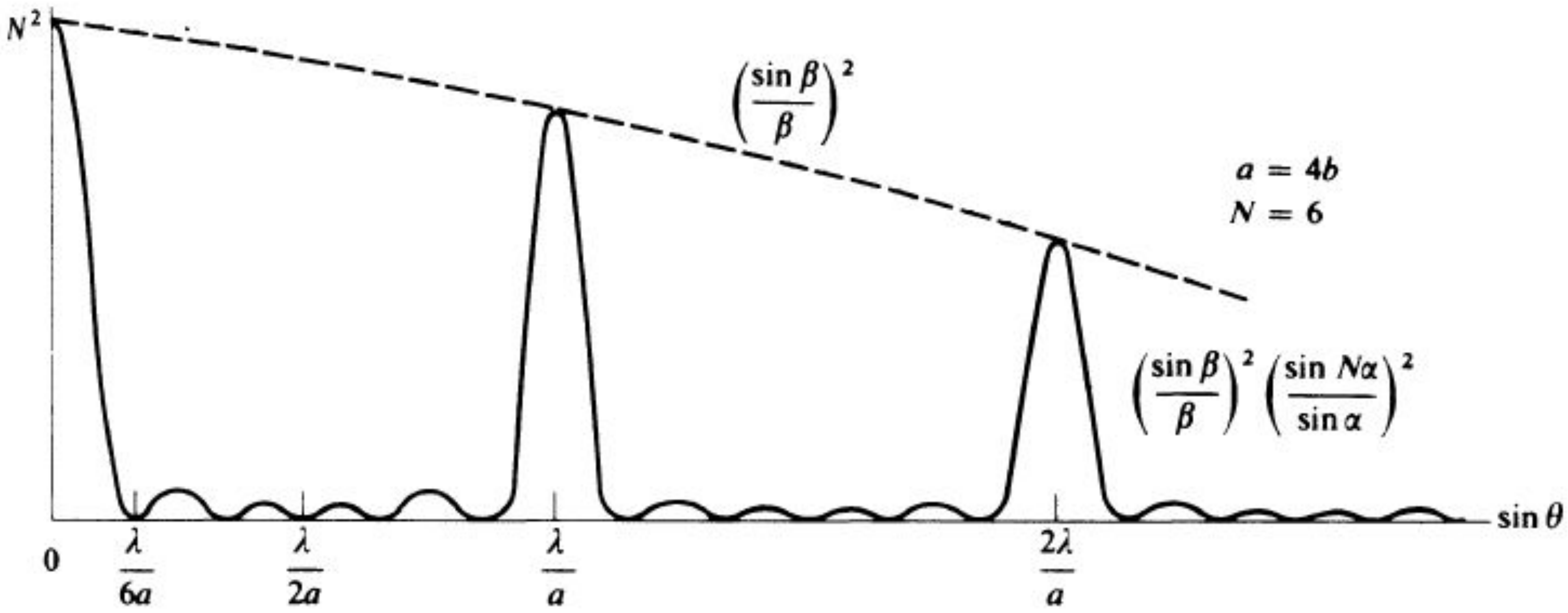
$$\alpha = \pm\frac{3\pi}{2N}, \pm\frac{5\pi}{2N}, \ldots$$

Son $N-2$ entre dos máximos principales

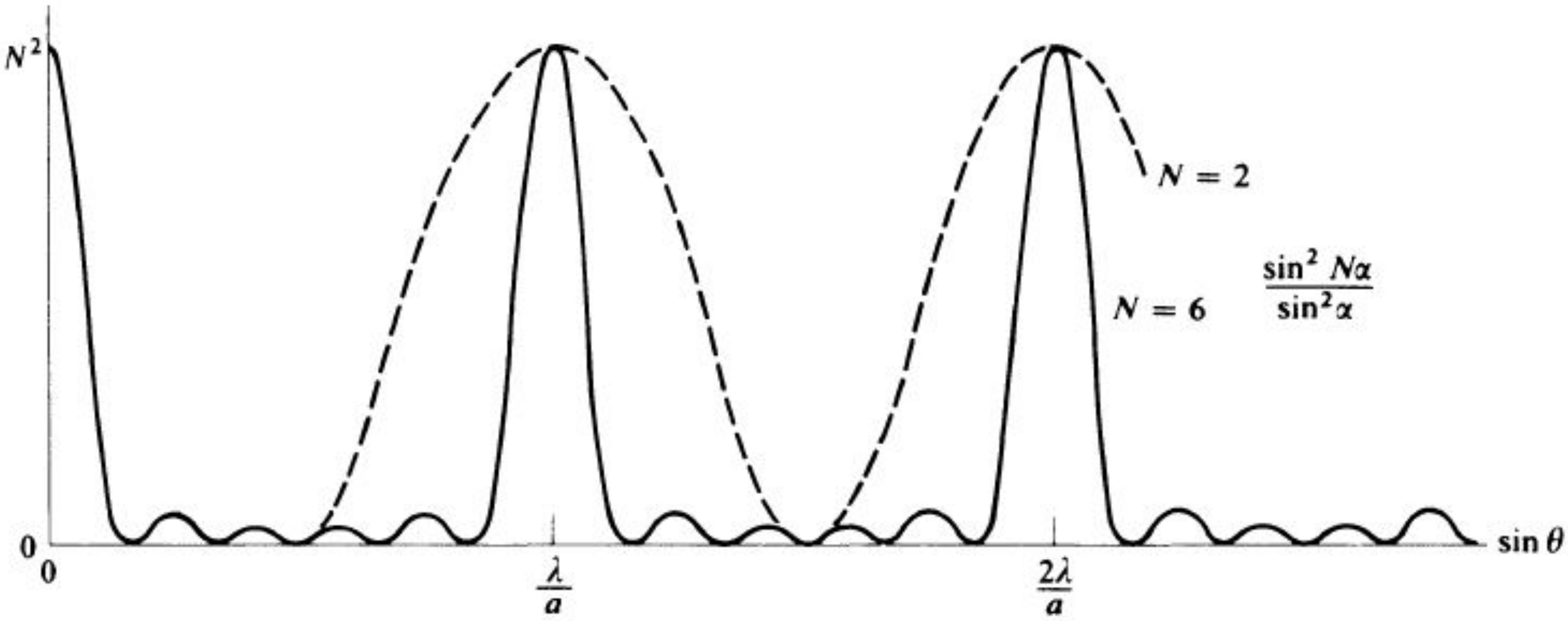
- Pues es ahí donde $\sin N\alpha$ tiene máximos
- En este ejemplo, esto corresponde a las ubicaciones:

$$\sin\theta_{maxsec} = \pm\frac{3\lambda}{2aN}, \pm\frac{5\lambda}{2aN}, \ldots$$

Ejemplo: 6 Rendijas



Ejemplo: 6 versus 2 rendijas



¿Cómo cámbian los máximos y los mínimos cuando varía N?

- Al aumentar N, la intensidad de los máximos principales de interferencia va aumentar como N^2. Es decir, acumulan más energía al aumentar N.

- La posición de los máximos principales no depende de N para $N \geq 2$.

- A la vez que crecen en intensidad, se vuelven más finos ya que los mínimos que los rodean se acercan.

$\Delta\alpha$ entre minimos que rodean a maximo principal

$$\frac{(N+1)\pi}{N} - \frac{(N-1)\pi}{N} = \frac{2\pi}{N}$$

- La posición de los máximos y mínimos de difracción no cambia con N.

- ¿Qué pasa con los máximos secundarios?
- Como $I(\theta = 0) = I_0 N^2$ la irradiancia puede reescribirse como:

$$I(\theta) = \frac{I(0)}{N^2}\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

- Al crecer N, los valores de α_{maxsec} correspondientes a los máximos secundarios se hacen cada vez más pequeños:

- Entonces, se puede aproximar $\sin\alpha_{maxsec} \cong \alpha_{maxsec}$

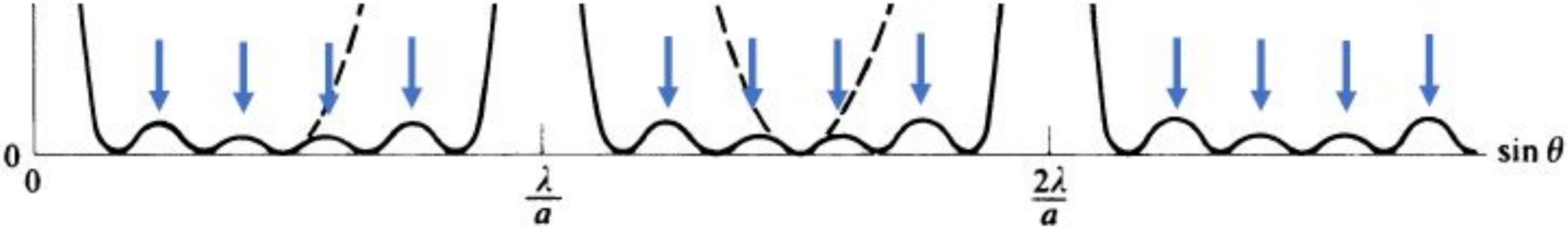
- Como $|\sin N\alpha_{maxsec}| = 1$ la irradiancia queda:
  - Para el primer máximo secundario

$$I(\theta_{maxsec1}) = \frac{I(0)}{N^2}\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \frac{4N^2}{9\pi^2} = I(0)\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \frac{4}{9\pi^2} \cong \frac{1}{22}\, I(0)\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$

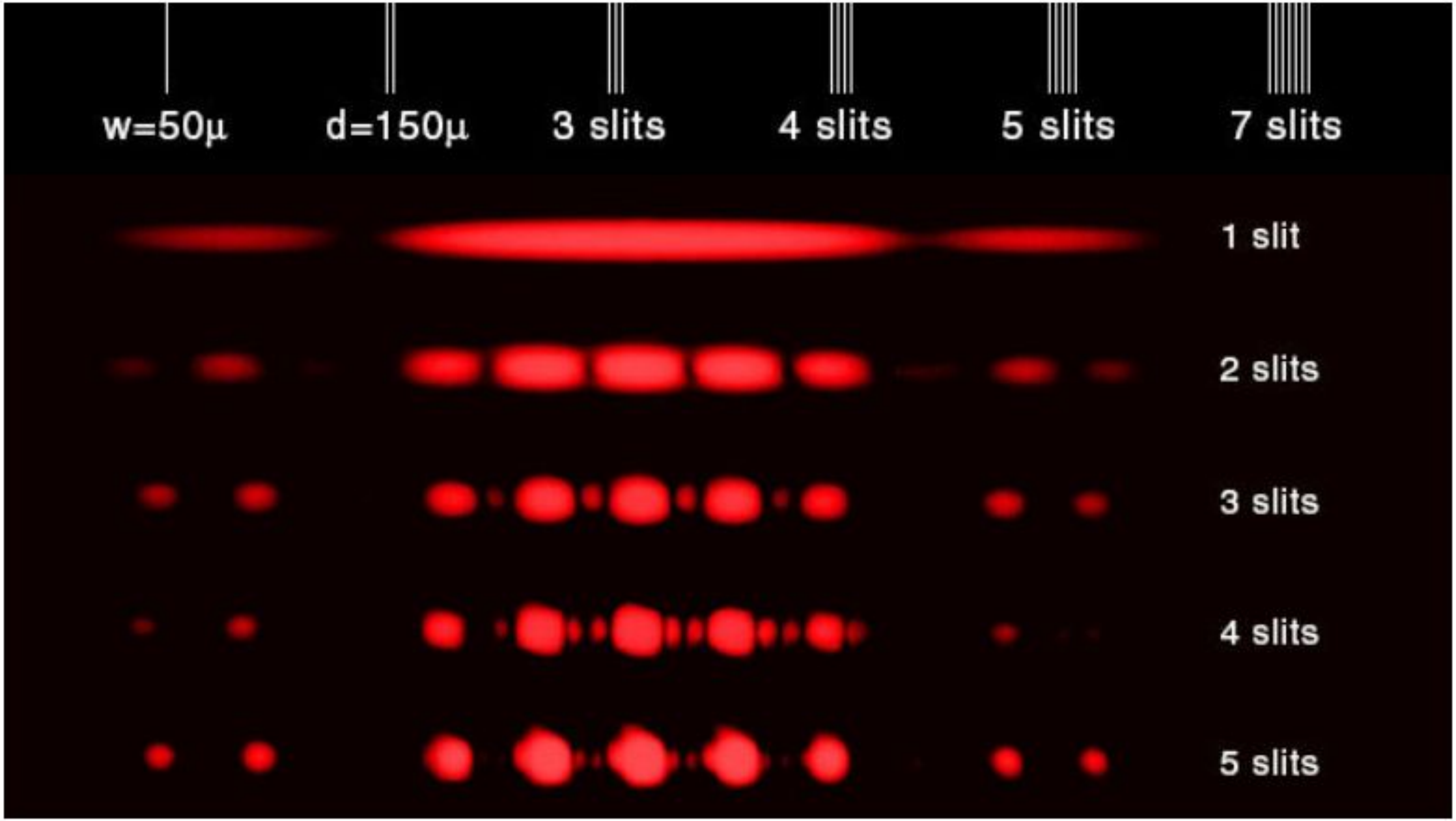
  - Para el segundo

$$I(\theta_{maxsec2}) \cong \frac{1}{64}\, I(0)\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$

- A mitad de camino del siguiente máximo principal, la intensidad de los máximos secundarios vuelve a subir de manera simétrica.



- La irradiancia de un máximo secundario no varía con N, pero su ancho se achica con lo cual al aumentar N se perciben cada vez menos.


w=50μ
d=150μ
3 slits
4 slits
5 slits
7 slits
1 slit
2 slits
3 slits
4 slits
5 slits